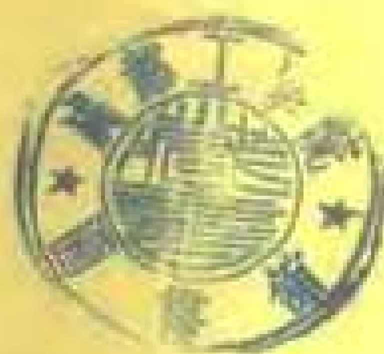
现代应用数学丛书

常微分方程

〔日〕福原满洲雄　佐藤常三　古屋　茂　著



上海科学技术出版社

統一书号 13119·487
定　价 1.50 元

現代应用数学丛书

常微分方程

福原滿洲雄
〔日〕佐藤常三 著
古屋 茂
張庆芳 張继貞 譯
張学銘 校

上海科学技术出版社

內容提要

本书是日本岩波书店出版的現代应用数学丛书之一的中譯本。主要內容包括常微分方程基础定理，一般綫性方程組，以及非綫性方程組三部分。計九章五十九节。系統地介紹了常微分方程最重要的基础理論，突出地論証解之存在与唯一性定理以及解之一般求法。可供大专院校理工科师生参考，对于进一步学习某些常微分方程专門著作也是一本非常有用的参考书。

原书分三册，第1章至第3章为第一册，第4章至第7章为第二册，第8章至第9章为第三册。現合并为一册出版。

現代应用数学丛书

常微分方程

原书名 常微分方程式 I II III

福原滿洲雄

原著者 〔日〕佐藤常三

古屋茂

原出版者 岩波书店，1957，1958

譯者 張庆芳 張继貞

校者 張学銘

*

上海科学技术出版社出版

（上海瑞金二路450号）

上海市书刊出版业营业許可証出093号

新华书店上海发行所发行 各地新华书店經售

商务印书館上海厂印刷

*

开本850×1168 1/32 印张8 28/32 字数209,000

1962年12月第1版 1962年12月第1次印刷

印数 1—5,700

統一书号：13119·487

定价：（十四）1.50元

出版說明

这一套书是根据日本岩波书店出版的"現代应用数学讲座"翻譯而成。日文原书共15卷60册，分成A、B两組，各編有序号。現在把原来同一題目分成两册或三册的加以合并，整理成42种，不另分組編号，陆續翻譯出版。

这套书涉及的面很广，其內容都和現代科学技术密切有关，有一定参考价值。每一本书收集的資料都比較丰富，而叙述扼要，篇幅不多，有利于讀者以較短时間掌握有关学科的主要內容。虽然，这套书的某些观点不尽适合于我国的情况，但其方法可供参考。因此，翻譯出版这一套书，对我国学术界是有所助益的。

由于日文原书是1957年起以讲座形式陆續出版的，写作时間和篇幅的限制不可避免地会影响原作者对內容的处理，为了尽可能地減少这种影响，我們在每一譯本中，特請譯者或校閱者撰写序或后記，以介紹有关学科的最近发展状况，并对全书內容作一些評价，提出一些看法，結合我国情况补充一些資料文献，在文內过于簡略或不足的地方添加了必要的注释和改正原书中存在的一些錯誤。希望这些工作能对讀者有所帮助。

承担翻譯和校閱的同志，为提高书籍的质量付出了巨大劳动，在此特致以誠挚的謝意。

欢迎讀者对本书提出批評和意見。

上海科学技术出版社

譯者序

本书主要内容包括常微分方程基础定理，一般綫性方程組，以及非綫性方程組三部分。由福原满洲雄等三人分别执笔写成。計分九章，五十九节。

第一部分包括前三章。第1章求积法与第3章不变点的存在定理从全书内容結构来看是"自封"的，就是說讀者如果具有微分方程的初等解法知識，可省去第1章不讀；讀者如果不貪求解之存在定理的抽象形式，也可把第3章略去不讀。与此相反，基于某种特殊目的，也可单独地讀第1章或第3章。第2章介紹了解的一般基础理論。

第二部分共四章。首先由第4章介紹一般綫性方程組理論；然后于第5章，第6章分别討論其特殊情况即常系数的与周期系数的方程；第7章叙述 Ляпунов 特征数理論。

第三部分先后于第8，9两章論及周期系数与概周期系数的非綫性方程組的两种特殊情况。

全书突出地論証解之存在与唯一性定理以及解之一般求法；至于定性理論只于奇点，解之估值，特征数，稳定性等很少几处稍略談及，而缺乏 Ляпунов 稳定性理論以及边值問題的定性理論；更未触及如方程之解析理論等其他方面专題。

今将本书内容重点及其特点擇要介紹如下：

第2章基础定理是关于解之定性研究的根本命題。Cauchy 問題解存在定理(实变数)的証明采用了 Picard 逐次逼近法，所得到的結果是"小范圍"的，或者說是"局部性"的。关于 Lipschitz 条件的使用有两点值得提出：其一，条件的給出是"小范圍"的[§18]；

其二，逐次逼近之間的估値采用比較精确的形式，即指数級数通項[(15.17)]。

解之唯一性定理是作为 ε-近似解之間的估値公式的推論而得到的。ε-近似解是存在定理的另一个証法，即 Peano 方法的重要手段，作者似乎不愿牵涉过多，但也給出 ε-近似解与解之間的估値公式[§16]，它的用处是很大的[§19, §20]。应注意唯一性的这样証明所得到的結果是"大范圍"的[§16]。

关于解之存在区間除通常习見者外[(17.7)]，尙給出在某种意义下最大的[(17.8)]，即所謂 Lindelöf 注意，由它推出綫性方程組解之存在唯一性定理是很方便的[§17]。

由"小范圍"所定义的解經过类似解析拓展的手續而扩充到"大范圍"，进而淺显地給出解之軌迹为曲綫弧的这个命題[§18, 定理 6]。

解关于参数的連續性定理証明未用 Picard 逐次逼近法，而技巧地选取一个变量代換将被考虑的方程归結到一个較簡单方程上去而得到的[§19 定理 7]。

为了更多地得出解之性质，如解关于参数的可微性等，照例地須加强假設条件，并且由于采用逐次逼近法未必方便的緣故，本书此处証明还是采用通常的涉及到变分方程的方法[§20]。

Cauchy 問題解存在定理(复变数)本来可采用逐次逼近法証明，并且这样做时解之定义域优于用优函数法所得到的結果。但作者却采用优函数法，其用意似乎一方面保持这一优良傳統方法，一方面也指出不沿"逐次逼近"亦有証明本定理的途徑[§21]。

値得注意的是 §22 定理 12，借助于它，甚易建立复变数綫性方程解之解析性定理，以及含参数解之解析拓展定理[§23 定理 15]——Poincar'e 注意。

第 3 章主要介紹两个存在定理，即 Schauder 型定理[§30]与

24 7/62

Leray-Schauder 定理[§32]。它們分别为欧氏 n 維空間的 Brower 不变点定理以及欧氏 n 維空間映射度存在定理在范空間的推广。当然，这并非是这两个定理的最抽象形式，因为它們还可移植于綫性拓扑空間，而范空間为其特殊形式——但証明方法基本上是一致的。邏輯上它們是分别建立的，但于 §31 也指出：Schauder 型定理为 Leray-Schauder 定理之推論。更重要的是——也是第一部分之目的——于 §30 把方程解之存在定理从 Schauder 型定理推导出来。

在第 4 章照例地給出有关綫性齐次方程的基础解組的 Wronskian 理論 [§36] 与在綫性方程組理論有用的共軛組[§37]，以及关于綫性非齐次方程求解之常数变易法[§38]，但須提出以下几点注意。

§34 給出所謂本书的基本不等式，它时常于綫性方程組解之估值有界性的考虑中是所謂 Bellman 不等式❶的一个推广。又綫性方程組求解公式是借助于核矩陣法而建立的 [§35]。在 §39 的 ε-近似解的論述中触及到几乎常系数綫性方程組的这一概念，但未明确提出。

第 5 章討論綫性齐次方程組的特殊情况——常系数。先于 §40 利用矩陣論 Jordan 分解定理給出綫性齐次方程組的基础解組的表現形式。其次于 §41，論述两个常系数綫性方程的方程組的奇点分类，兼涉及穩定性問題。該节作用有二：其一，給予前节理論一个具体說明；其二，有助于行使分析-拓扑方法对于非綫性方程組解之穩定性的討論——惟本书不談。在 §40 末曾談及穩定性

---

❶ 所謂 Bellman 不等式就是下述命題：

$$u\leqslant c_1+\int_0^t uv\,dt_1,\ 此处\ \ u(t),\ v(t)\geqslant 0,\ c_1\geqslant 0,\ u\leqslant c_1 e^{\int_0^t v\,dt_1}.$$

可參見 R. Bellman，微分方程的解的穩定性理論，中譯本 132 頁。

一詞，更未論及其判斷法則，是以此两节內容的联系似不易发現。

第6章討論綫性齐次方程組的另个特殊情况——周期系数，从寻常事例，可知周期系数綫性齐次方程組未必有非零之周期解，由此即引出所謂 Floquet 理論，同时又有所謂周期系数組可簡化为常系数組的这个 Ляпунов 定理。二者事虽各异，其理則一，本书只强調后者，而忽視前者[§42, §43]。作为前述理論应用，于§44对于周期系数二阶方程論述极詳，这里有对于著名的 Mathieu 型方程的討論[§44]。

关于方程組解之有界性的判断是很困难的，而解之漸近理論却能給予补助，Ляпунов 特征数理論是研究漸近性理論的重要途徑。第7章首先給出特征数演算之基本性质，其后将特征数应用于齐次方程上而得出所謂特征数理論——主要是特征数的估値以及利用系数对于特征数的計算[§45]。

最后两章分別考虑所謂拟綫性方程組的特殊类型的周期解与概周期解的存在問題与逼近問題，此两章內容的邏輯結构是相仿的，都是建基于綫性方程組的[§46, §53]——参見本书各章邏輯关系表。

非綫性方程的 Lindstedt 解法于§49中提及，Van der Pol 方程虽然缺少，而类型与之相近的方程則于例題中出現[§49,例]，但如 Emden-Fowler 方程这样重要的二阶非綫性方程本书未曾提及。

在概周期解的結果还不完备的情况下，本书第9章是很难得的。

至于本书所使用的工具，除第3章外，主要是数学分析，矩陣，(代数的)綫性方程組，行列式等；积分是 Riemann 的。

本书有时論証的邏輯过程長而叙述簡短，以及有时不明确提出所引用的重要(书外)定理与定义，尤其是缺乏指导文献与序言，

这就可能使初学者讀本书时碰到一些困难。

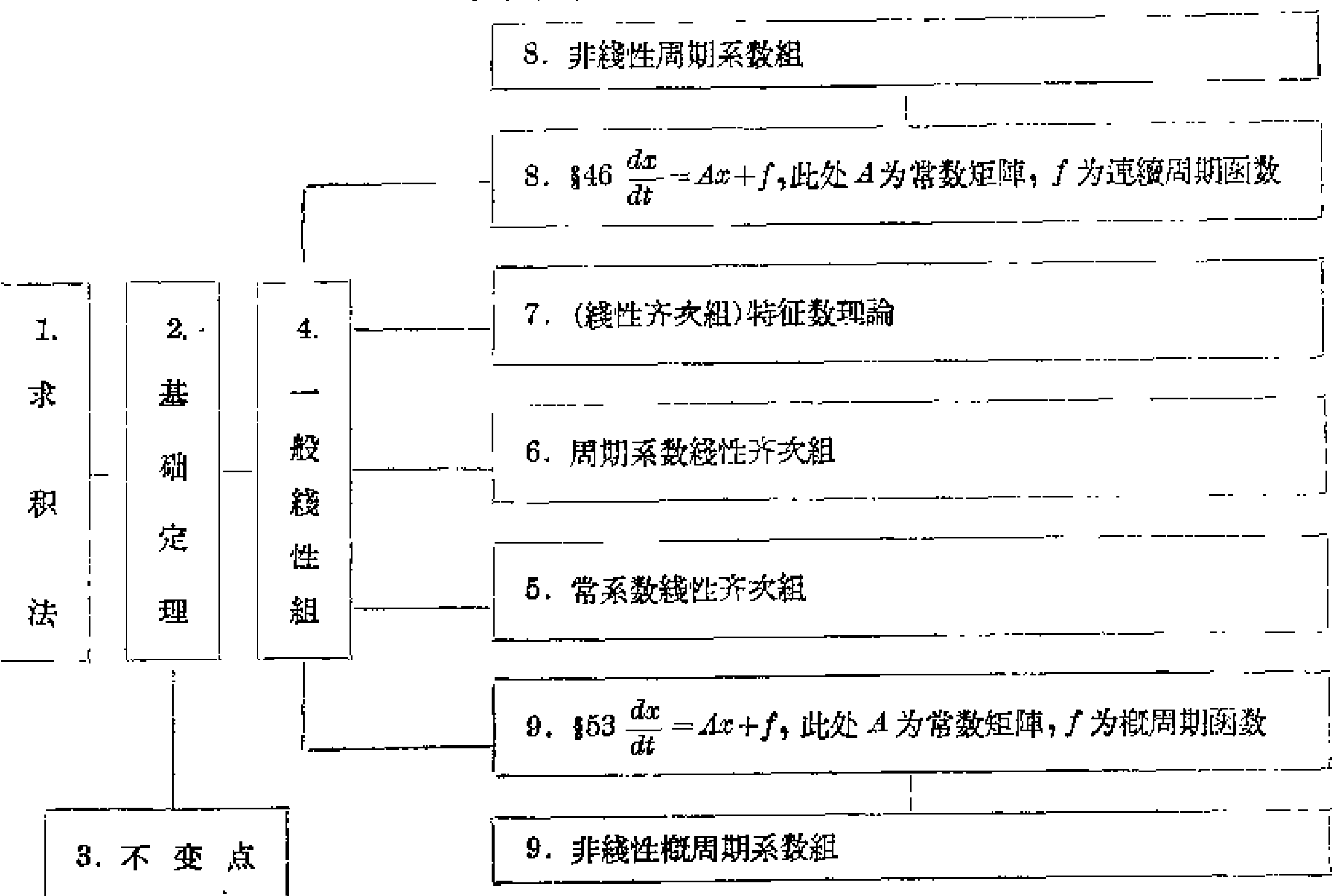
譯者把讀本书所遇到之疑义注于书末,以求正于专家与讀者。

在本书翻譯工作上,譯者难以忘記的而不能不提出的是,业师楊宗磐教授在譯文內容上,文字上給予大量的指示与教正;同事吳振德先生在注解計算工作上給了很多帮助;同学王玉怀先生繕写与整理譯稿达一年之久,譯稿整理完毕的那一天正是他向工作崗位出发的前夕。

本书承張学銘教授对譯文作了仔細校正审察,又加了若干注解,譯者衷心地致以敬意与謝忱。

張庆芳、張继貞 于62年初

本书各章邏輯关系一覽表



本表为譯者所拟,其中阿拉伯数碼表示本书章号。

目　　录

第1章[1] 求 积 法

用数学的方法，經过有限次地归并已知函数与作不定积分求出微分方程的解，叫做用**求积法**解微分方程。求积法也叫做初等解法。

可用求积法解的微分方程毕竟是一些特殊的方程，在許多情况下求积法是不适用的。但对于微分方程中常見的类型在什么情况下能用求积法求解，却是一个很重要而具有实际意义的問題。

§1 可分离变数型

凡是一阶常微分方程[2]，不作特別声明时，y 就表示 x 的函数，y' 就表示这一函数的导数。如果 y' 等于仅以 x 为变数的函数与仅以 y 为变数的函数的乘积，則称这种微分方程为**可分离变数型**。設 X 表示仅以 x 为变数的函数，Y 表示仅以 y 为变数的函数，則可分离变数型的微分方程大多可写成形式

$$Y\,dy=X\,dx. \tag{1.1}$$

毫无疑問它与

$$y'=X/Y \tag{1.2}$$

有相同的意义。

用等式

$$\int X\,dx-\int Y\,dy=C \quad (C\text{ 为任意常数}) \tag{1.3}$$

定义一个 x 的函数 y。关于 x 微分 y 就得到

$$X-Yy'=0.$$

---

[1] 第1章至第3章由稲原执笔。——原书注

[2] 只含有自变数，自变数的函数以及这一函数的导数的关系式叫做一阶常微分方程。以式表之就是 $F(x,y,y')=0$。——原书注

由这一等式解出 y' 后就得到(1.2)，所以从(1.3)可得(1.2)的解。对于一阶常微分方程，含有一个任意常数的解，如上面所得到的那个解，叫做**通解**❶。

例 1 $$y' = -\sqrt{1-y^2}/\sqrt{1-x^2}.$$

将此等式写成(1.1)的形式就得到

$$dy/\sqrt{1-y^2} = -dx/\sqrt{1-x^2}.$$

积分后得到

$$\arc\sin y + \arc\sin x = C.$$

例 2 $$y' = \lambda y/x \quad (\lambda \text{ 是常数}).$$

将此等式写成(1.1)的形式

$$dy/y = \lambda dx/x.$$

积分后得到

$$\log y = \lambda \log x + C. \tag{1}$$

化对数方程为指数方程，得

$$y = Cx^{\lambda}. \tag{2}$$

注意 (1)，(2)中 C 的值并不相同。将(1)变形后所得到的式子并不是(2)，而是

$$y = x^{\lambda}e^{C}. \tag{3}$$

因为 e^C 也表示任意常数，故可改写为 C，从而得到(2)式。

严格一些說，当限定变数取值的范圍为实数时，e^C 的值恒正，因而 e^C 所表示的任意常数也只能是正数。如果只在实数范围内考虑問題，可将(1)式中的 x，y 分别表为 $|x|$，$|y|$，从而(2)式就是

$$|y| = |x|^{\lambda}e^{C},$$

即 $$y = \pm e^{C}|x|^{\lambda}.$$

等号右端的符号依下述規則決定：当 $y>0$ 时，取"+"号；当 $y<0$ 时，取"−"号。在 C 取实数值的条件下，e^C 固然是正数，但是它的前边还有"±"号，所以我們把解写为(2)的形式后，认为式內的 C 可表正值或負值。

如果考虑变数取复数值时，就可以省去这一項繁瑣的注意了。由此也可以理解到把初等函数看成是复变函数的优越性。这項注意对于熟知函数論的讀者是不成問題的，因此今后对类似的情况不再作解釋了。

---

❶ 通解定义，可参看 И. Г. Петровский："常微分方程讲义"一书。——校者注

§2 齐 次 型

經过变数变换而将所給微分方程化为已知的类型来求解，这种方法是求积法中最常用的。齐次型微分方程就是一个簡单的例子。

形如

$$y'=f(y/x) \tag{2.1}$$

的方程，其中 y' 是仅以 y/x 为变数的函数，叫做**齐次型**的微分方程。

令 $y=xu$，則

$$xu'=f(u)-u$$

就是一个可分离变数型的方程。对此式积分卽得

$$\int\frac{du}{f(u)-u}=\log x+C.$$

改写为指数形式后就得到

$$\exp\int\frac{du}{f(u)-u}=Cx.$$

在

$$y'=f\left(\frac{ax+by+c}{a'x+b'y+c'}\right)\quad(ab'-a'b\neq 0)\ ❶ \tag{2.2}$$

---

❶ 当 $ab'-a'b=0$ 时，則 $\frac{a'}{a}=\frac{b'}{b}=k$（此处 k 为比例常数）。因而 $a'=ka, b'=bk$，于是(2.2)成为

$$y'=f\left\{\frac{(ax+by)+c}{k(ax+by)+c'}\right\}.$$

再命 $u=ax+by$，則 $\frac{du}{dx}=a+by'$；从而(2.2)成为

$$\left(\frac{du}{dx}-a\right)\frac{1}{b}=f\left(\frac{u+c}{ku+c'}\right),$$

卽

$$\frac{du}{dx}=bf\left(\frac{u+c}{ku+c'}\right)+a.$$

因而(2.2)化为可分离变数型了。

或用本节习題所示之法，也可将(2.2)化为可分离变数型，不管 $ab'-a'b$ 是否等于零。——譯者注

的情况下，設

$$ax+by+c=0, \quad a'x+b'y+c'=0$$

的解是 $x=\alpha$, $y=\beta$，并使 $x=\xi+\alpha$, $y=\eta+\beta$。于是得关于 ξ, η 的方程

$$\frac{d\eta}{d\xi}=f\left(\frac{a\xi+b\eta}{a'\xi+b'\eta}\right),$$

此等式的右端是仅以 η/ξ 为变数的函数，因而这是一个齐次型的微分方程。

例 $$y'=\frac{x+y+1}{x-y-3}.$$

由方程組 $x+y+1=0, \quad x-y-3=0,$

可以解出 $x=1, \quad y=-2.$

于是命 $\xi=x-1, \quad \eta=y+2,$

就得到一个齐次型的方程

$$\frac{d\eta}{d\xi}=\frac{\xi+\eta}{\xi-\eta}.$$

再命 $\eta=\xi u$，就得到可分离变数型的方程

$$\xi\frac{du}{d\xi}=\frac{1+u}{1-u}-u.$$

积分后即得 $$\arctan u-\frac{1}{2}\log(1+u^2)=\log\xi+C,$$

上式变形之后就是

$$\arctan\frac{y+2}{x-1}=\frac{1}{2}\log\{(x-1)^2+(y+2)^2\}+C.$$

习题 对(2.2)作变换

$$X=a'x+b'y+c', \quad Y=ax+by+c$$

后，也可以得到一个可分离变数型的方程。試以这一方法解前一例题中的方程。

§3 綫性微分方程

形如

$$y'=p(x)y+q(x) \tag{3.1}$$

的微分方程叫做一阶**綫性微分方程**。在 $q(x)=0$ 的情况下，它就是可分离变数型的方程，因而可以直接求解。所得結果就是

$$y=Ce^{\int p(x)dx}.$$

今将此等式中的任意常数 C 换为未知函数 z，就得到一个变换

$$y=ze^{\int p(x)dx}, \tag{3.2}$$

在原方程中作这一变换，即得

$$z'=q(x)e^{-\int p(x)dx},$$

再对所得結果积分，就得到

$$z=\int q(x)e^{-\int p(x)dx}dx+C.$$

从而(3.1)的通解就是

$$y=e^{\int p(x)dx}\left\{\int q(x)e^{-\int p(x)dx}dx+C\right\}. \tag{3.3}$$

因为(3.1)是經常見到的一个类型，所以最好能把表示它的通解的公式(3.3)記牢。变换(3.2)是这样得到的，即用未知函数置换(3.1)在 $q(x)=0$ 情况下的通解中的任意常数。用这样的变换求解的方法叫常数变易法。

例 $$xy'=\lambda y+ax^{\mu}.$$

将此式写成(3.1)的形式后就得到

$$p(x)=\lambda/x,\quad q(x)=ax^{\mu-1}.$$

因为 $$\int p(x)dx=\lambda\log x,$$

由公式(3.3)可得

$$y=x^{\lambda}\left\{\int ax^{\mu-\lambda-1}dx+C\right\},$$

所以 $$y=\begin{cases}\dfrac{ax^{\mu}}{\mu-\lambda}+Cx^{\lambda} & (\lambda\neq\mu),\\ x^{\lambda}(a\log x+C) & (\lambda=\mu).\end{cases}$$

习題 1 試証 $y'=\lambda y+ae^{\mu x}$ 的解是 $y=\begin{cases}\dfrac{ae^{\mu x}}{\mu-\lambda}+Ce^{\lambda x} & (\lambda\neq\mu),\\ e^{\lambda x}(ax+C) & (\lambda=\mu).\end{cases}$

习題 2 方程 $y'+p(x)y+q(x)y^n=0\quad(n\neq1)$

叫做 Bernoulli 微分方程。試証：以 $z=y^{1-n}$ 为未知函数可将原方程化为綫性方程。

§4 Riccati 微分方程

形如

$$y'+p(x)y^2+q(x)y+r(x)=0 \tag{4.1}$$

的方程叫做 **Riccati 微分方程**，这种方程在一般形式下不能用求积法来解。但是它具有独特的性质。

設 $y=\varphi_0(x)$ 是(4.1)的一个特解，应用变换 $y=z+\varphi_0(x)$ 可将原方程化为 Bernoulli 微分方程

$$z'+\{q(x)+2p(x)\varphi_0(x)\}z+p(x)z^2=0.$$

此处，取 $u=1/z$ 为未知函数，就得到綫性微分方程

$$u'=\{q(x)+2p(x)\varphi_0(x)\}u+p(x).$$

由公式(3.3)可知，綫性微分方程的通解是任意常数的一次整式。因而可以把这一方程的通解写为

$$u=Cf(x)+g(x).$$

所以(4.1)的通解就可以写成

$$y=\frac{Cf_1(x)+g_1(x)}{Cf(x)+g(x)}. \tag{4.2}$$

这就是說，可以把 Riccati 微分方程的通解表达为任意常数的一次有理式。

习題 試証(4.1)的四个解 $\varphi_1(x)$，$\varphi_2(x)$，$\varphi_3(x)$，$\varphi_4(x)$ 的非調和比

$$\frac{\varphi_1(x)-\varphi_3(x)}{\varphi_2(x)-\varphi_3(x)}:\frac{\varphi_1(x)-\varphi_4(x)}{\varphi_2(x)-\varphi_4(x)}$$

是一个常数。

例 从历史上說，方程

$$y'+ay^2=bx^m$$

就是原来的 Riccati 微分方程，此处 a，b，m 都是常数。在一般形式下这种方程也仍不能用求积法来解。但是当 $m=-2$ 时，試以 $y=A/x$ 代入方程就

得到
$$-A+aA^2=b,$$
如果 A 满足这个二次方程，$y=A/x$ 就是原方程的一个解。再設
$$y=\frac{A}{x}+\frac{1}{u},$$
就有
$$xu'=2aAu+ax.$$
这个方程的通解就是
$$u=\begin{cases}\dfrac{Cx^{2aA}+ax}{1-2aA} & (2aA\neq 1),\\ x(a\log x+C) & (2aA=1).\end{cases}$$
由此就得到
$$y=\begin{cases}\dfrac{A}{x}+\dfrac{1-2aA}{Cx^{2aA}+ax} & (2aA\neq 1),\\ \dfrac{A}{x}+\dfrac{1}{x(a\log x+C)} & (2aA=1).\end{cases}$$

§5 Lagrange 和 Clairaut 微分方程

在方程
$$y=xf(y')+g(y') \tag{5.1}$$
中，如果 $f(y')\neq y'$，就叫做 **Lagrange 微分方程**；如果 $f(y')=y'$，则叫做 **Clairaut 微分方程**。

設 $y'=p$，并关于 x 微分(5.1)，于是有
$$p=f(p)+\{xf'(p)+g'(p)\}p'. \tag{5.2}$$
在 $f(p)=p$ 时，即原方程是 Clairaut 方程的情况下，(5.2)就是
$$\{xf'(p)+g'(p)\}p'=0.$$
由此得到
$$p'=0 \quad 或 \quad xf'(p)+g'(p)=0.$$
在前一情况下 $p=C$（常数），从而
$$y=xf(C)+g(C) \tag{5.3}$$
就是(5.1)的通解；在后一等式成立的情况下，把 p 看作参变数后，由
$$y=xf(p)+g(p),\quad xf'(p)+g'(p)=0, \tag{5.4}$$

可以定义 x 的函数 y. 这一函数就是(5 1)的解。这里所得到的解是通解(5.3)所表示的直綫族的包絡綫，是未被包含在通解內的。这种解叫做奇解。对于通解所包含的常数給以特定的値而得到的解叫做特解。奇解与特解的涵义各自不同。

在原方程不是 Clairaut 方程的情况下，如把 x 看作 p 的函数，由(5.2)可以得到以 x 为未知函数的綫性微分方程

$$\frac{dx}{dp}+\frac{xf'(p)+g'(p)}{f(p)-p}=0. \tag{5.5}$$

解此方程就得到

$$x=C\varphi(p)+\psi(p).$$

上式与方程

$$y=xf(p)+g(p)$$

中，如把 p 看作参变数，就可以定义 x 的函数 y. 所得到的函数就是(5.1)的通解。

注意 我們在 Clairaut 微分方程的情况下遇到了奇解，这不等于說处处都有奇解出現。关于奇解以后还要討論。

§6 积 分

設方程

$$P(x, y)dx+Q(x, y)dy=0 \tag{6.1}$$

为已知方程。它与方程

$$\frac{dy}{dx}=-\frac{P(x, y)}{Q(x, y)} \tag{6.2}$$

等价。現在不把 y 看作 x 的函数，而把 x 看作 y 的函数，由微分学中熟知的公式

$$\frac{dx}{dy}=\frac{1}{\dfrac{dy}{dx}}$$

就可以知道(6.2)的解的反函数就是微分方程

$$\frac{dx}{dy}=\frac{Q(x, y)}{P(x, y)} \tag{6.3}$$

的解。反过来，这个方程的解的反函数就是(6.2)的解，因而微分方程(6.2)与(6.3)可以看成是等价的方程。从而，当微分方程能化成(6.1)的形式时，方程中 x, y 的任一个可作为自变数来看待。

如果下述方程

$$df(x, y)=\lambda(x, y)\{P(x, y)dx+Q(x, y)dy\} \tag{6.4}$$

成立，也就是如果有使

$$\frac{\partial}{\partial x}f(x, y)=\lambda(x, y)P(x, y), \quad \frac{\partial}{\partial y}f(x, y)=\lambda(x, y)Q(x, y)$$

成立的 $\lambda(x, y)$ 存在，同时也就是 $f(x, y)$ 关于 x, y 的偏导数分别与 $P(x, y)$, $Q(x, y)$ 成比例时，$f(x, y)$ 就叫做(6.1)的**积分**。

如果(6.4)成立，则由方程

$$f(x, y)=C \quad (C\text{ 是任意常数}) \tag{6.5}$$

可以定义一个 x 的函数 y，不难証明这一函数确能满足(6.2)。从而可以称(6.5)是(6.1)的通解。

$f(x, y)$ 是(6.1)的积分的条件❶还可以写成

$$Q\frac{\partial f}{\partial x}-P\frac{\partial f}{\partial y}=0. \tag{6.6}$$

如果 $g(x, y)$ 也是(6.1)的积分，则等式

$$Q\frac{\partial g}{\partial x}-P\frac{\partial g}{\partial y}=0 \tag{6.7}$$

成立，并且由这一等式与(6.6)可以得到

$$\frac{D(f, g)}{D(x, y)}=0❷.$$

这一等式表示出 f, g 之間存在函数关系。反过来，由 $g=F(f)$ 也

---

❶ 这是充分必要条件。——譯者注

❷ $\frac{D(f, g)}{D(x, y)}=\begin{vmatrix} f_x & f_y \\ g_x & g_y \end{vmatrix}$ 叫做 f, g 关于 x, y 的函数行列式。——譯者注

容易得到(6.7)❶,从而有

定理 (6.1)的某一积分的任一函数都是(6.1)的积分。所有这些积分都可以表示成某一个特定积分的函数。

§7 积分因子

使得(6.4)成立的$f(x, y)$存在时,也就是(6.4)的右端是全微分时,即称$\lambda(x, y)$为(6.1)的**积分因子**。

使得(6.4)为全微分的条件是

$$\frac{\partial(\lambda P)}{\partial y}=\frac{\partial(\lambda Q)}{\partial x},$$

也就是

$$P\frac{\partial \log \lambda}{\partial y}-Q\frac{\partial \log \lambda}{\partial x}=\frac{\partial Q}{\partial x}-\frac{\partial P}{\partial y}. \tag{7.1}$$

如果$\mu(x, y)$也是(6.1)的积分因子,那当然有

$$P\frac{\partial \log \mu}{\partial y}-Q\frac{\partial \log \mu}{\partial x}=\frac{\partial Q}{\partial x}-\frac{\partial P}{\partial y} \tag{7.2}$$

成立,从(7.1)的两端分别减去(7.2)的两端,再命$\nu=\lambda/\mu$,不难知道ν满足

$$P\frac{\partial \nu}{\partial y}-Q\frac{\partial \nu}{\partial x}=0. \tag{7.3}$$

这就表明$\nu(x, y)$也是(6.1)的积分。反过来,由(7.1)与(7.3),对于$\mu=\lambda/\nu$就可以得到(7.2)成立。从而有

定理 两个积分因子的比是积分。反之,积分因子与积分的乘积是积分因子。

---

❶ 因$g=F(f)$,而f为(6.1)的积分,故

$$dg=F'(f)\left(\frac{\partial f}{\partial x}dx+\frac{\partial f}{\partial y}dy\right)$$ (当然这是在足够条件下进行的),

于是
$$\frac{\partial g}{\partial x}=F'\frac{\partial f}{\partial x},\quad \frac{\partial g}{\partial y}=F'\frac{\partial f}{\partial y},$$

两等式各乘Q与P后,相减即得。——译者注

例1 試解 $(\alpha+ax^my^n)ydx+(\beta+bx^my^n)xdy=0 \quad (ab-\beta a\neq 0)$.

将所給等式改写为

$$\alpha ydx+\beta xdy=-x^my^n(aydx+bxdy), \tag{1}$$

如果找到了这一等式两端共同的积分因子，那末就可得到所給微分方程的积分因子了。

显然 $1/xy$ 是左端的积分因子。对于

$$\frac{1}{xy}(\alpha ydx+\beta xdy)=0$$

积分就得到 $\log(x^\alpha y^\beta)$. 但是 $x^\alpha y^\beta$ 的任何一个函数都是其积分，所以(1)式左端的积分因子的一般形式就是

$$\frac{1}{xy}F(x^\alpha y^\beta).$$

同样(1)式右端的积分因子的一般形式是

$$\frac{1}{x^{m+1}y^{n+1}}G(x^ay^b).$$

現在，应在使
$$\frac{1}{xy}(x^\alpha y^\beta)^p=\frac{1}{x^{m+1}y^{n+1}}(x^ay^b)^q$$
成立的条件下决定 $p,\ q$ 之值。这一条件就是

$$\alpha p-aq+m=0,\quad \beta p-bq+n=0.$$

在决定了满足此条件的 $p,\ q$ 之值以后，等式

$$(x^\alpha y^\beta)^p\left\{(\alpha+ax^my^n)\frac{dx}{x}+(\beta+bx^my^n)\frac{dy}{y}\right\}=0$$

的左端就是全微分。对此等式积分就可以得到所給微分方程的通解

$$\frac{1}{p}(x^\alpha y^\beta)^p+\frac{1}{q}(x^ay^b)^q=C.$$

例2 在§1中的微分方程

$$dx/\sqrt{1-x^2}+dy/\sqrt{1-y^2}=0,$$

显然是以 $\arcsin x+\arcsin y$ 为其积分的。另一方面，$\sqrt{1-x^2}\sqrt{1-y^2}-xy$ 又是这一微分方程的积分因子，所以，用此积分因子乘微分方程并积分之后就得到通解

$$x\sqrt{1-y^2}+y\sqrt{1-x^2}=C.$$

此等式的左端是所給微分方程的积分，所以由§6定理有下列函数关系

$$x\sqrt{1-y^2}+y\sqrt{1-x^2}=F(\arcsin x+\arcsin y)$$

成立。命 $u=\arcsin x,\ v=\arcsin y$，則这一函数关系就是

$$\sin u\cos v+\cos u\sin v=F(u+v).$$

于此命 $v=0$,則有 $F(u)=\sin u$;于是我們就得到三角函数的加法公式

$$\sin(u+v)=\sin u\cos v+\cos u\sin v.$$

习题 試利用 1 与 xy 是方程

$$\frac{dx}{x}+\frac{dy}{y}=0$$

的积分因子,仿例 2,导出指数函数的加法公式。

§8 高阶微分方程的降阶法

含有未知函数 y 的最高阶导数为 n 阶的方程

$$F(x,y,y',\cdots,y^{(n)})=0 \tag{8.1}$$

叫做 n 阶微分方程。含有 n 个任意常数的解定义为通解。含于通解的解叫做特解,这和一阶微分方程中的定义相同。

求高阶微分方程的解,可以施行适当变换而逐次降低其阶数。

(1) 不显含未知函数 y 的方程。在更为一般的情况下,(8.1) 的左端不显含 $y,y',\cdots,y^{(m)}$ 时,可以考虑在原方程中以 z 代 $y^{(m)}$,z' 代 $y^{(m+1)}$ 等等而得到的 $(n-m)$ 阶微分方程。求出这一方程的有 $(n-m)$ 个任意常数的通解 z 之后,再作 m 次积分就得到未知函数 y,此时任意常数又增加了 m 个,y 的表达式内就总共含有 n 个任意常数了。

(2) 不显含自变数 x 的方程。把 x 看成 y 的函数,并注意到

$$y'=\frac{1}{\frac{dx}{dy}},$$

$$y''=\frac{dy}{dx}\frac{d}{dy}\left(\frac{1}{\frac{dx}{dy}}\right)=-\frac{\frac{d^2x}{dy^2}}{\left(\frac{dx}{dy}\right)^3},$$

一般形式

$$y^{(k)}=\frac{1}{\frac{dx}{dy}}\frac{dy^{(k-1)}}{dy},$$

由此可知 $y^{(k)}$ 只由 dx/dy, d^2x/dy^2, $\cdots$, d^kx/dy^k 所表出。从而，把 x 看作自变数 y 的函数之后，所給方程就是不显含未知函数 x 的方程，于是問題就归結为前一种情形了。

例 1 試解 $$2y'y'''-3y''^2=0.$$

所給方程不显含 y，于是命 $z=y'$，化原方程为二阶微分方程

$$2zz''-3z'^2=0.$$

这一方程不显含 x，因而可以把 x 看成 z 的函数，于是有

$$2z\frac{d^2x}{dz^2}+3\frac{dx}{dz}=0.$$

所得到的方程不显含未知函数 x，命 $u=dx/dz$，則上式可化为一阶微分方程

$$2zdu+3udz=0.$$

以 zu 除等式两端就得到可分离变数型的方程，积分之后卽得

$$u^2z^3=C \quad 卽 \quad \frac{dx}{dz}=Cz^{-\frac{3}{2}}.$$

再积分就得到

$$x=C_1z^{-\frac{1}{2}}+C_2.$$

在此等式內以 y' 代 z 并解出 y'，

$$y'=C_1/(x-C_2)^2.$$

积分后卽得

$$y=C_3-C_1/(x-C_2).$$

改写此等式为

$$y=\frac{Ax+B}{Cx+D},$$

其中 A, B, C, D 可取任意值。于此可知通解是 x 的任意一个一次有理函数。(A, B, C, D 都可取任意値并不等于說在通解里有四个任意常数，因为决定通解的是它們的比，实质上任意常数只有三个 $A:B$, $B:C$, $C:D$.)

(3) 关于 y 的齐次方程，卽形式如

$$F(x, y'/y, y''/y, \cdots, y^{(n)}/y)=0$$

的方程。这种方程的特征是，設 c 是任意常数，以 cy 代 y 后方程不变。

命 $z=y'/y$，即 $y=e^{\int z dx}$，于是

$$y'=ze^{\int z dx},$$
$$y''=(z'+z^2)e^{\int z dx},$$
$$y'''=(z''+3zz'+z^3)e^{\int z dx}.$$

一般形式 $y^{(k)}$ 是 $z, z', \cdots, z^{(k-1)}$ 的多项式与 $e^{\int z dx}=y$ 的乘积。在原方程中作相应替换之后，就得到关于 z 的 $(n-1)$ 阶微分方程。将这一方程的通解代入 $y=Ae^{\int z dx}$（A 是任意常数），就得到所給方程的通解。

例 2 試解
$$y''+a^2y=0.$$

命 $y=Ae^{\int z dx}$，原方程即化为
$$z'+z^2+a^2=0.$$

对于这一方程积分就得到
$$z=-a\tan a(x-C).$$

由此可得到所給方程的通解为
$$y=A\cos a(x-C).$$

将 C 换为 $C+\pi/2a$，通解又可以写成
$$y=A\sin a(x-C).$$

(4) x, y 的齐次方程，即形式如
$$F(y/x,\ y',\ xy'',\ \cdots,\ x^{n-1}y^{(n)})=0$$
的方程。这种方程的特征是，設 c 为任意常数，以 cx 代 x，以 cy 代 y 方程不变[1]。

---

[1] 因为 $\frac{cy}{cx}=\frac{y}{x}$，$\frac{d(cy)}{d(cx)}=\frac{dy}{dx}=y'$，$(cx)\frac{d^2(cy)}{d(cx)^2}=(cx)\frac{d}{d(cx)}\left(\frac{d(cy)}{d(cx)}\right)$

$$=cx\cdot\frac{d}{d(cx)}y'=cx\cdot\frac{dy'}{dx}\frac{dx}{d(cx)}=cx\cdot y''\cdot\frac{1}{c}=xy'',\ \cdots,$$

所以用数学归纳法可証

$$(cx)^{n-1}\frac{d^n(cy)}{d(cx)^n}=x^{n-1}y^{(n)},$$

于是 $F\left(\frac{cy}{cx},\frac{d(cy)}{d(cx)},\ cx\frac{d^2(cy)}{d(cx)^2},\cdots,\ (cx)^{n-1}\frac{d^n(cy)}{d(cx)^n}\right)=F\left(\frac{y}{x},\ y',xy'',\cdots,x^{n-1}y^{(n)}\right)$.

——譯者注

取 $u=y/x$ 为未知函数，对于原方程实施相应变换，就得到这样一个方程：当保持 u 不变而以 cx 代 x 时，它不改变。于此把 x 看作 u 的函数后，問題的解法可仿 (3) 进行。

(5) 更一般的情况是以 $c^{\lambda}x$ 代 x，以 $c^{\mu}y$ 代 y 而不引起变形的方程。取 $u=y^{\lambda}/x^{\mu}$ 为未知函数，对于原方程实施相应变换，就得到这样一个方程：当保持 u 不变而以 cx 代 x 时，它不改变。于此把 x 看作 u 的函数后，問題的解法可仿 (3) 进行。

§9 綫性微分方程的一般性质

形如

$$p_0(x)y^{(n)}+p_1(x)y^{(n-1)}+\cdots+p_n(x)y=q(x) \tag{9.1}$$

的方程叫做 **n 阶綫性微分方程**。在 $q(x)=0$ 的情形下方程叫做齐次的。今設 $p_0(x)\neq 0$，以 $p_0(x)$ 除方程各項，随后改写 $y^{(n-1)},\cdots,y$ 的系数为 $p_1(x),\cdots,p_n(x)$，同时方程的右端仍照写为 $q(x)$，則所得到的方程就是

$$y^{(n)}+p_1(x)y^{(n-1)}+\cdots+p_n(x)y=q(x). \tag{9.2}$$

关于方程 (9.2)，下述 Cauchy 存在定理成立。

定理 1 (复变数情况下的存在定理) 如果 $p_1(x),\cdots,p_n(x)$，$q(x)$ 在单連通域 D 内是解析的，則方程 (9.2) 有唯一解 y，它使得 $y,\cdots,y^{(n-1)}$ 在 D 内一点 a 分别取初值 $b_0,b_1,\cdots,b_n$，并且它在 D 内是解析的。

定理 2 (实变数情况下的存在定理) 如果 $p_1(x),\cdots,p_n(x)$，$q(x)$ 在区間 $\alpha<x<\beta$ 内連續，則在区間 $\alpha<x<\beta$ 内，方程 (9.2) 有唯一解 y，它使得 $y,\cdots,y^{(n-1)}$ 在区間内一点 a 分别取初值 b_0，$b_1,\cdots,b_n$.

以上两定理在下一章証明❶。

❶ 参考第 2 章定理 9 与定理 1。——譯者注

今設 $\varphi(x)$是(9.2)的一解，命 $y-\varphi(x)=z$，經过簡单的計算可化(9.2)为

$$z^{(n)}+p_1(x)z^{(n-1)}+\cdots+p_n(x)z=0, \tag{9.3}$$

这就是

定理3 設 $\varphi(x)$为(9.2)的任一个解，命 $y-\varphi(x)=z$，則方程(9.2)化为齐次方程(9.3)。

如果 $z=\psi_k(x)$ $(k=1, 2, \cdots, m)$都是(9.3)的解，可以証明，以常数 $C_1, C_2, \cdots, C_m$ 为系数的 $\psi_1(x), \cdots, \psi_m(x)$的一次整式

$$z=C_1\psi_1(x)+C_2\psi_2(x)+\cdots+C_m\psi_m(x) \tag{9.4}$$

也是(9.3)的解。这个解叫做 m 个解 $z=\psi_k(x)$ $(k=1, 2, \cdots, m)$的綫性組合。从而有

定理4 齐次方程(9.3)的解的綫性組合仍是(9.3)的解。

如果只限于 $C_1=C_2=\cdots=C_m=0$ 时(9.4)才能够恒等于零，我們就說这 m 个解 $z=\psi_k(x)$ $(k=1, 2, \cdots, m)$是**綫性无关**的。

定理5 如果(9.3)恰好有 n 个綫性无关的解，則它的所有解都是这 n 个解的一个綫性組合。

假設以 c_{jk} $(j, k=1, 2, \cdots, n)$ 为元素的行列式不等于零，并且設(9.3)有解 $z=\psi_j(x)$，它在 $x=a$ 处使 $z=c_{j1}$, $z'=c_{j2}$, $\cdots$, $z^{(n-1)}=c_{jn}$.

如果等式

$$C_1\psi_1(x)+C_2\psi_2(x)+\cdots+C_n\psi_n(x)=0 \tag{9.5}$$

成立，关于 x 微分(9.5) $k-1$ 次，就有

$$C_1\psi_1^{(k-1)}(x)+C_2\psi_2^{(k-1)}(x)+\cdots+C_n\psi_n^{(k-1)}(x)=0,$$

在此等式内以 a 代 x，又有

$$c_{1k}C_1+c_{2k}C_2+\cdots+c_{nk}C_n=0. \tag{9.6}$$

此处使 k 取 $1, 2, \cdots, n$ 各值，就得到关于 $C_1, C_2, \cdots, C_n$ 的 n 个方程，由假設这 n 个方程所成方程組的系数行列式不等于零，所以

必有

$$C_1=C_2=\cdots=C_n=0.$$

这就是說，这 n 个解 $z=\psi_j(x)$ $(j=1, 2, \cdots, n)$ 是綫性无关的❶。

今設 $z=\psi(x)$ 是(9.3)的任一解。根据假設及上面的証明可知，由 $c_{jk}(j, k=1, 2, \cdots, n)$ 所組成的行列式不等于零，所以由方程組

$$c_{1k}C_1+c_{2k}C_2+\cdots+c_{nk}C_n=\psi^{(k-1)}(a) \quad (k=1, 2, \cdots, n)$$

就可決定 $C_1, C_2, \cdots, C_n$ 之值。依确定了値的 $C_1, C_2, \cdots, C_n$ 造 $\psi_1(x), \cdots, \psi_n(x)$ 的綫性組合

$$z=C_1\psi_1(x)+C_2\psi_2(x)+\cdots+C_n\psi_n(x), \tag{9.7}$$

它就是在 $x=a$ 处使得 $z=\psi(a)$, $z'=\psi'(a)$, $\cdots$, $z^{(n-1)}=\psi^{(n-1)}(a)$ 成立的(9.3)的解。由解的唯一性，所以应有

$$\psi(x)=C_1\psi_1(x)+C_2\psi_2(x)+\cdots+C_n\psi_n(x),$$

这就是說 $\psi(x)$ 表达为 n 个解 $z=\psi_j(x)$ $(j=1, 2, \cdots, n)$ 的綫性組合。

如果由 $c_{jk}(j,k=1,2,\cdots,n)$ 所組成的行列式等于零，則在(9.6)中当 $k=1, 2, \cdots, n$ 而得到的关于 $C_1, C_2, \cdots, C_n$ 的方程組还要有 $C_1=C_2=\cdots=C_n=0$ 以外的解。由这样的解 $C_1, C_2, \cdots, C_n$ 所造出的(9.7)就是(9.3)在 $x=a$ 处 $z=0$, $z'=0, \cdots, z^{(n-1)}=0$ 的解。由解的唯一性，显然这样的解就是 $z=0$。从而(9.5)就是恒等式，所以这 n 个解 $z=\psi_j(x)$ $(j=1, 2, \cdots, n)$ 不是綫性无关的。当 x 表实变数时，在 $p_1(x), \cdots, p_n(x)$ 是連續的区間内的任一点都可以看成 a，当 x 表复变数时，在 $p_1(x), \cdots, p_n(x)$ 是解析的区域内的任一点也都可以看成 a，因此有

定理 6 使得 n 个解 $z=\psi_j(x)$ $(j=1, 2, \cdots, n)$ 是綫性无关的

❶ 由以上証明了"$|c_{jk}|\neq 0$，此处 $c_{jk}=z^{(k-1)}|_{x=a}$, $k=1, 2, \cdots, n$"推知"$\psi_1(x), \cdots, \psi_n(x)$ 綫性无关"，其实反过来也如此，只要仔細考察这段証明卽可。——譯者注

条件就是行列式

$$W(\psi_1, \cdots, \psi_n)=\begin{vmatrix} \psi_1(x) & \psi_2(x) & \cdots & \psi_n(x) \\ \psi_1'(x) & \psi_2'(x) & \cdots & \psi_n'(x) \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \psi_1^{(n-1)}(x) & \psi_2^{(n-1)}(x) & \cdots & \psi_n^{(n-1)}(x) \end{vmatrix} \tag{9.8}$$

不得恒等于零。

这个行列式叫做 **Wronski** 行列式，并且下列等式成立：

$$W(\psi_1, \cdots, \psi_n)=C\exp\left(-\int_a^x p_1(x)dx\right). \tag{9.9}$$

在 (9.9) 的証明中应注意下述事实，一般以 $\Delta(x)$ 表示由 $f_{jk}(x)\,(j, k=1, 2, \cdots, n)$ 所組成的行列式，而由此行列式的第 j 行代以此行的导数所得到的行列式記为 $\Delta_j(x)$。于是下述等式成立：

$$\Delta'(x)=\Delta_1(x)+\Delta_2(x)+\cdots+\Delta_n(x). \tag{9.10}$$

理由如下：以 $(k_1, k_2, \cdots, k_n)$ 表示 $(1, 2, \cdots, n)$ 的任一排列，于是

$$\Delta(x)=\sum \pm f_{1k_1}(x)f_{2k_2}(x)\cdots f_{nk_n}(x),$$

从而有

$$\begin{aligned}\Delta'(x)=&\sum \pm f_{1k_1}'(x)f_{2k_2}(x)\cdots f_{nk_n}(x)\\ &+\sum \pm f_{1k_1}(x)f_{2k_2}'(x)\cdots f_{nk_n}(x)\\ &\cdots\cdots\cdots\cdots\\ &+\sum \pm f_{1k_1}(x)f_{2k_2}(x)\cdots f_{nk_n}'(x).\end{aligned}$$

此式右端第 j 个和就是在 $\Delta(x)$ 中 $f_{j1}(x), \cdots, f_{jn}(x)$ 代以它們的导数 $f_{j1}'(x), \cdots, f_{jn}'(x)$ 而得到的行列式，亦就是 $\Delta_j(x)$。于是証明了 (9.10) 的成立。利用这一結果，关于 x 微分 (9.8) 就得到

$$\frac{d}{dx}W(\psi_1, \cdots, \psi_n)=\begin{vmatrix} \psi_1(x) & \psi_2(x) & \cdots & \psi_n(x) \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \psi_1^{(n-2)}(x) & \psi_2^{(n-2)}(x) & \cdots & \psi_n^{(n-2)}(x) \\ \psi_1^{(n)}(x) & \psi_2^{(n)}(x) & \cdots & \psi_n^{(n)}(x) \end{vmatrix};$$

因为 $z=\psi_j(x)\ (j=1, 2, \cdots, n)$ 是(9.3)的解，所以最后一行就是

$$-\sum_{k=1}^{n} p_k(x)\psi_1^{(n-k)}(x), \cdots, -\sum_{k=1}^{n} p_k(x)\psi_n^{(n-k)}(x).$$

将第 1, 2, …, $(n-1)$ 行分别乘以 $p_n(x), p_{n-1}(x), \cdots, p_2(x)$，然后将所得結果加到最后一行，就得到

$$\frac{d}{dx}W(\psi_1, \cdots, \psi_n) = -p_1(x)W(\psi_1, \cdots, \psi_n).$$

对上式积分立即得到(9.9)。

§10 用常数变易法求解

由定理 5 可知，欲解齐次方程(9.3)，可以先求它的 n 个綫性无关的解。設 $z=\psi_j(x)\ (j=1, 2, \cdots, n)$ 是它的綫性无关的解，則(9.7)就是它的通解。

毫无疑問，在一般情况下(9.3)的解是不能用求积法求出的，但当已知它的 n 个綫性无关的解 $z=\psi_j(x)\ (j=1, 2, \cdots, n)$ 时，可以用求积法求出非齐次的方程(9.2)的解，作法如下：由方程組

$$\left.\begin{array}{l} y = u_1\psi_1(x) + u_2\psi_2(x) + \cdots\cdots + u_n\psi_n(x), \\ y' = u_1\psi_1'(x) + u_2\psi_2'(x) + \cdots\cdots + u_n\psi_n'(x), \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots, \\ y^{(n-1)} = u_1\psi_1^{(n-1)}(x) + u_2\psi_2^{(n-1)}(x) + \cdots + u_n\psi_n^{(n-1)}(x) \end{array}\right\} \quad (10.1)$$

定义 $u_1, u_2, \cdots, u_n$。則 $u_1, u_2, \cdots, u_n$ 的系数的行列式就是 Wronski 行列式(9.8)，所以它不等于零。

关于 x 微分(10.1)的第一式并自所得結果减去第二式，仿此継續演算一直到

$$\left.\begin{array}{l} 0 = u_1'\psi_1(x) + u_2'\psi_2(x) + \cdots\cdots + u_n'\psi_n(x), \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots, \\ 0 = u_1'\psi_1^{(n-2)}(x) + u_2'\psi_2^{(n-2)}(x) + \cdots + u_n'\psi_n^{(n-2)}(x). \end{array}\right\} \quad (10.2)$$

再微分(10.1)中最后一式，以 $p_n(x), p_{n-1}(x), \cdots, p_1(x)$ 依次乘

(10.1)各式，将所得結果与前一結果統統加在一起，就得到

$$q(x)=u_1'\psi_1^{(n-1)}(x)+u_2'\psi_2^{(n-1)}(x)+\cdots+u_n'\psi_n^{(n-1)}(x). \quad (10.3)$$ [1]

由 (10.2) 与(10.3) 可以求出作为 x 的函数的 $u_1', u_2', \cdots, u_n'$。設其結果是

$$u_1'=q_1(x),\ u_2'=q_2(x),\ \cdots,\ u_n'=q_n(x),$$

則将

$$u_1=C_1+\int q_1(x)dx,\ \cdots,\ u_n=C_n+\int q_n(x)dx$$

代入

$$y=u_1\psi_1(x)+u_2\psi_2(x)+\cdots+u_n\psi_n(x),$$

就得到(9.2)的解。

在这里所利用的变换，是把齐次方程(9.3)的通解(9.7)中的任意常数 $C_1, C_2, \cdots, C_n$ 换为未知函数 $u_1, u_2, \cdots, u_n$ 而得到的，因而这种方法叫做常数变易法。

例　試解　$x^2(x-1)^2y''-2y=x(x-1)$ [2]。

所給方程的右端是 0 时，它就是一个齐次方程，这样的齐次方程有下列两个綫性无关解[3]：

$$(x-1)^2/x,\ x^2/(x-1).$$

---

[1] (10.2)与(10.3)正是求非齐次方程 (9.2) 的通解的常数变易法；但解题时须注意(9.2)中 $\frac{d^n(y)}{d(x)^n}$ 项的系数为 1，因此，如果所解方程并非如此，須先化成(9.2)的形状，再应用这一方法。——譯者注

[2] 解題时可按以下步驟进行：

1．用观察法得出齐次方程的两个綫性无关解：$\frac{(x-1)^2}{x}$，$\frac{x^2}{x-1}$。

2．化方程为(9.2)形状：$y''-\frac{2}{x^2(x-1)^2}y=\frac{x(x-1)}{x^2(x-1)^2}$。

3．用常数变易法，决定 u', v'；再积分得出 u, v。

$$\begin{cases} 0=u'\dfrac{(x-1)^2}{x}+v'\dfrac{x^2}{x-1} \\ \dfrac{x(x-1)}{x^2(x-1)^2}=u'\left(\dfrac{(x-1)^2}{x}\right)'+v'\left(\dfrac{x^2}{x-1}\right)'. \end{cases}$$

4．将 u, v 代入即可。——譯者注

[3] 本书中关于此种微分方程解法叙述不多，欲詳細研究，可参閱拙著"常微分方程式の解法 II，綫型の部"(岩波书店，昭和 16 年)。——原书注

設
$$y=u\,\frac{(x-1)^2}{x}+v\,\frac{x^2}{x-1},$$
$$y'=u\,\frac{x^2-1}{x^2}+v\,\frac{x^2-2x}{(x-1)^2},$$
就有
$$0=u'\,\frac{(x-1)^2}{x}+v'\,\frac{x^2}{x-1},$$
$$x(x-1)=u'(x-1)^3(x+1)+v'x^3(x-2).$$
由此可解出 u', v',
$$u'=x/3(x-1)^3,\quad v'=-(x-1)/3x^3.$$
积分后即得
$$u=\frac{1}{3}\left(-\frac{1}{x-1}+\log(x-1)\right)+C,\quad v=-\frac{1}{3}\left(\frac{1}{x}+\log x\right)-C'.$$
从而通解就是
$$y=\frac{(x-1)^2}{x}\left(C+\frac{1}{3}\log(x-1)\right)-\frac{x^2}{x-1}\left(C'+\frac{1}{3}\log x\right)$$
$$-\frac{1}{3}\left(\frac{1}{x(x-1)}+2\right).$$

§ 11 微分算子的性质

在以常数 a_0, a_1, $\cdots$, a_n 为系数的綫性微分方程
$$a_ny^{(n)}+a_{n-1}y^{(n-1)}+\cdots+a_0y=q(x) \tag{11.1}$$
的解法中，利用微分算子的方法是很簡便的，这一节里我們来研究微分算子的重要性质。

令对于 x 的函数实施 k 次微分的演算記为 D^k。从而
$$D^ky=d^ky/dx^k.$$
一般的形式是，对照 ρ 的多項式
$$f(\rho)=a_n\rho^n+a_{n-1}\rho^{n-1}+\cdots+a_0 \tag{11.2}$$
作出
$$f(D)=a_nD^n+a_{n-1}D^{n-1}+\cdots+a_0,$$
并用它来表示下面的演算
$$f(D)y=a_ny^{(n)}+a_{n-1}y^{(n-1)}+\cdots+a_0y.$$
从而微分方程(11.1)可以改写为

$$f(D)y=q(x).\tag{11.3}$$

設

$$g(\rho)=b_m\rho^m+b_{m-1}\rho^{m-1}+\cdots+b_0,$$

則相当于多項式$f(\rho)\pm g(\rho)$的运算以$f(D)\pm g(D)$表之，而相当于多項式$f(\rho)g(\rho)$的运算以$f(D)g(D)$表之。此时，对于x的任意函数y, z,下列諸等式成立：

$$f(D)(y\pm z)=f(D)y\pm f(D)z,\tag{11.4}$$

$$(f(D)\pm g(D))y=f(D)y\pm g(D)y,\tag{11.5}$$

$$(f(D)g(D))y=f(D)(g(D)y).\tag{11.6}$$

試以(11.6)为例进行証明。因为

$$f(\rho)g(\rho)=\sum_{l=0}^{m+n}(\sum_{k+h=l}a_kb_h)\rho^l,$$

所以

$$(f(D)g(D))y=\sum_{l=0}^{m+n}(\sum_{k+h=l}a_kb_h)y^{(l)}.$$

命$z=g(D)y$，就是

$$z=\sum_{h=0}^{m}b_hy^{(h)},$$

所以有

$$f(D)(g(D)y)=f(D)z=\sum_{k=0}^{n}a_kz^{(k)}=\sum_{k=0}^{n}\sum_{h=0}^{m}a_kb_hy^{(k+h)}$$

$$=\sum_{l=0}^{m+n}(\sum_{k+h=l}a_kb_h)y^{(l)},$$

于此可見，(11.6)是成立的。

定义$f(D)^{-1}$为$f(D)$的逆运算。从而认为

$$f(D)^{-1}y=z\quad 与\quad y=f(D)z$$

是等价的关系式。把z看作未知函数时，后式就是一个n阶綫性微分方程，从而$f(D)^{-1}y$就是这一微分方程的任意一个解。由此可以知道，用I表示使任意一个函数y对应于y自身的运算时，可写出

$$f(D)f(D)^{-1}=I.\tag{11.7}$$

这个乘积的形式，它的顺序是不能变更的，亦即不能把它写成

$$f(D)^{-1}f(D)=I.$$

例如在 $f(\rho)=\rho$ 的情况下，$f(D)=D$ 表示关于 x 实施微分运算，$f(D)^{-1}=D^{-1}$ 表示实施不定积分的运算。实施不定积分之后再微分，我們又得到了原来的函数，但先微分而后实施不定积分，却得不到原来的函数，而得到一与原函数之差是一个常数的函数。

虽然，加，减，乘法的普通計算法則适用于算子 D 的多項式，但基于前述理由，在含有除法的情况下，須要愼重从事。

最后再介紹一个在解微分方程时常利用的公式。首先用归納法証明一个等式。直接可以得到

$$D(e^{\lambda x}y)=e^{\lambda x}(D+\lambda)y.$$

設一般形式是

$$D^k(e^{\lambda x}y)=e^{\lambda x}(D+\lambda)^k y, \tag{11.8}$$

則由

$$\begin{aligned}D^{k+1}(e^{\lambda x}y)&=D(e^{\lambda x}((D+\lambda)^k y))\\&=e^{\lambda x}(D+\lambda)((D+\lambda)^k y)=e^{\lambda x}(D+\lambda)^{k+1}y\end{aligned}$$

就可以知道(11.8)对于所有自然数都成立。从而有

$$\begin{aligned}f(D)(e^{\lambda x}y)&=\sum_{k=0}^{n}a_kD^k(e^{\lambda x}y)=\sum_{k=0}^{n}a_ke^{\lambda x}(D+\lambda)^k y\\&=e^{\lambda x}\sum_{k=0}^{n}a_k(D+\lambda)^k y=e^{\lambda x}f(D+\lambda)y,\end{aligned}$$

即

$$f(D)(e^{\lambda x}y)=e^{\lambda x}f(D+\lambda)y \tag{11.9}$$

成立。这就是解微分方程时常要用到的公式。

§12 常系数齐次綫性微分方程

設 $f(\rho)$ 表示两个互质的多項式 $f_1(\rho)$，$f_2(\rho)$ 的乘积

$$f(\rho)=f_1(\rho)f_2(\rho).$$

正如在代数学中所熟知的，可以决定两个满足关系

$$f_1(\rho)g_1(\rho)+f_2(\rho)g_2(\rho)=1 \tag{12.1}$$

的多項式 $g_1(\rho)$, $g_2(\rho)$. 此刻 (12.1)是恒等式, 它是在 ρ 与常数間作加, 减, 乘的运算而得到的, 所以可以在此式内把 ρ 换为算子 D. 从而对于任一函数 y,有

$$f_1(D)g_1(D)y+f_2(D)g_2(D)y=y \tag{12.2}$$

成立。特别在 y 表示齐次綫性微分方程

$$f(D)y=0 \tag{12.3}$$

的解时,有

$$f_2(D)f_1(D)g_1(D)y=f(D)g_1(D)y=g_1(D)f(D)y=0,$$

$$f_1(D)f_2(D)g_2(D)y=f(D)g_2(D)y=g_2(D)f(D)y=0.$$

因而 (12.2) 的左端是 $f_2(D)y=0$ 的解与 $f_1(D)y=0$ 的解之和。因此有

定理 7　在 $f(\rho)$是两个互质多項式 $f_1(\rho)$与 $f_2(\rho)$的乘积的情况下, 齐次綫性微分方程 (12.3) 的解可以用 $f_1(D)y=0$ 的解与 $f_2(D)y=0$ 的解之和表示。

$f(\rho)$叫做微分方程(12.3)的**特征多項式**,而

$$f(\rho)=0 \tag{12.4}$$

叫做(12.3)的**特征方程**。設微分方程(12.3)的特征方程的根 α_1, α_2, $\cdots$, α_r 的重度为 m_1, m_2, $\cdots$, m_r,由定理 7,(12.3)的解可化为 r 个微分方程

$$(D-\alpha_j)^{m_j}y=0 \quad (j=1,\ 2,\ \cdots,\ r)$$

的解之和,于是产生

$$(D-\alpha)^m y=q(x) \tag{12.5}$$

的解应如何求得的問題。

設 $y=e^{\alpha x}z$, 由公式(11.9)可得

$$(D-\alpha)^m(e^{\alpha x}z)=e^{\alpha x}D^m z,$$

因而(12.5)就化为

$$D^m z = e^{-\alpha x} q(x),$$

于是

$$z = \underbrace{\int \cdots \int}_{m} e^{-\alpha x} q(x) dx \cdots dx + C_0 + C_1 x + \cdots + C_{m-1} x^{m-1},$$

从而(12.5)的解就可写为

$$y = e^{\alpha x} \left\{ \underbrace{\int \cdots \int}_{m} e^{-\alpha x} q(x) dx \cdots dx + C_0 + C_1 x + \cdots + C_{m-1} x^{m-1} \right\}.$$

特别在 $q(x) = 0$ 的情况下，解就是

$$y = (C_0 + C_1 x + \cdots + C_{m-1} x^{m-1}) e^{\alpha x}.$$

所以(12.3)的解可由

$$x^k e^{\alpha_j x} \quad (k = 0, 1, \cdots, m_j - 1;\ j = 1, 2, \cdots, r)$$

的綫性組合表示出来。这也就是說它們是(12.3)的 n 个綫性无关的解。

注意 在 $a_0, a_1, \cdots, a_n$ 是实数的情况下，方程(12.4)可以有复数根 $\alpha = \beta + i\gamma$ (β, γ 是实数)。設它的重度为 m，則 α 的共轭数 $\bar{\alpha} = \beta - i\gamma$ 也是(12.4)的 m 重根。因为有

$$\frac{e^{\alpha x} + e^{\bar{\alpha} x}}{2} = e^{\beta x} \cos \gamma x, \quad \frac{e^{\alpha x} - e^{\bar{\alpha} x}}{2i} = e^{\beta x} \sin \gamma x,$$

所以可以取

$$x^k e^{\beta x} \sin \gamma x, \quad x^k e^{\beta x} \cos \gamma x \quad (k = 0, 1, \cdots, m-1)$$

为对应于这两个 m 重根的 $2m$ 个实解。

例 1 試解 $$y'' + a^2 y = 0.$$

其特征方程为 $\rho^2 + a^2 = 0$，而特征方程的根是 $\pm ia$，因而可以得到微分方程的两个解 $\sin ax$, $\cos ax$. 其通解就是

$$y = A \sin ax + B \cos ax.$$

在§8中引过这一例題，所求出的通解与上式的形式不同，但在本质上是相同的。这是因为

$$A \sin a(x - C) = A \cos aC \sin ax - A \sin aC \cos ax,$$

而且当改写 $A \cos aC$, $-A \sin aC$ 为 A, B 之后，前后所求出的两个通解就

有相同的形式了。

例2 試解 $y^{\mathrm{IV}}-4y'''+7y''-6y'+2y=0$.

其特征方程为

$$\rho^4-4\rho^3+7\rho^2-6\rho+2=0.$$

此方程的根是 1, $1\pm i$, 而 1 是两重根。因而就得到四个綫性无关的解

$$e^x,\ xe^x,\ e^x\sin x,\ e^x\cos x.$$

§ 13 常系数綫性非齐次方程

有了綫性齐次方程(12.3)的解，綫性非齐次方程(11.1)的解就可以用常数变易法求出。但是对綫性非齐次方程，利用微分算子的解法在計算上較为簡便。

根据部分分式的原理将 $1/f(\rho)$ 展开，并設所得結果为

$$\frac{1}{f(\rho)}=\sum_{j=1}^{r}\sum_{k=1}^{m_j}\frac{A_{jk}}{(\rho-\alpha_j)^k}, \tag{13.1}$$

再設

$$f_{jk}(\rho)=f(\rho)/(\rho-\alpha_j)^k \quad (k=1,\ 2,\ \cdots,\ m_j;j=1,\ 2,\ \cdots,\ r).$$

以 $f(\rho)$ 乘(13.1)的两边，就得到恒等式

$$1=\sum_{j=1}^{r}\sum_{k=1}^{m_j}A_{jk}f_{jk}(\rho).$$

因为 $f_{jk}(\rho)$ 是多項式，所以可将式内的 ρ 換为微分算子 D. 从而对于任意函数 $q(x)$ 有

$$q(x)=\sum_{j=1}^{r}\sum_{k=1}^{m_j}A_{jk}f_{jk}(D)q(x) \tag{13.2}$$

成立。又

$$f_{jk}(D)=f_{jk}(D)(D-\alpha_j)^k(D-\alpha_j)^{-k}=f(D)(D-\alpha_j)^{-k},$$

所以将(13.2)变形后，$q(x)$ 就可写成

$$q(x)=f(D)\sum_{j=1}^{r}\sum_{k=1}^{m_j}A_{jk}(D-\alpha_j)^{-k}q(x).$$

由此可知(11.1)的解是

$$y=\sum_{j=1}^{r}\sum_{k=1}^{m_j}A_{jk}(D-\alpha_j)^{-k}q(x). \tag{13.3}$$

特別在 $q(x)$ 是 x 的多項式的情况下，由此得到的求(11.1)的解的步驟就更为簡便。

在 $\rho=0$ 的条件下，将 $1/f(\rho)$ 展为 Laurent 級数，就得到

$$1/f(\rho)=\sum_{k=-m}^{\infty}c_k\rho^k.$$

此处当 $f(0)\neq0$ 时 $m=0$，当 $f(0)=0$ 时 $f(\rho)$ 的零点 $\rho=0$ 的重度是 m。

設

$$1/f(\rho)=\sum_{k=-m}^{\nu-1}c_k\rho^k+g_\nu(\rho)/f(\rho),$$

即

$$1=f(\rho)\sum_{k=-m}^{\nu-1}c_k\rho^k+g_\nu(\rho). \tag{13.4}$$

很明显 $g_\nu(\rho)$ 是 ρ 的多項式，且它含有因子 ρ^ν。因为(13.4)的两端都是 ρ 的多項式，所以可以把其中的 ρ 换为算子 D。再若多項式 $q(x)$ 的次数比 ν 小，而 $g_\nu(\rho)$ 又不含次数低于 ν 的項，則有

$$g_\nu(D)q(x)=0,$$

从而由(13.4)可得

$$q(x)=f(D)\sum_{k=-m}^{\nu-1}c_kD^kq(x).$$

这一事实表明

$$y=\sum_{k=-m}^{\nu-1}c_kD^kq(x)❶ \tag{13.5}$$

---

❶ 当 $q(x)$ 为 x 的多項式时，本文所說簡捷解法，可如下进行：

1. 将 $f(\rho)$ 写成 $f(D)$；

2. 按 D 之升幂，以 $f(D)$ 除 1，直当商式的次数与 $q(x)$ 的次数相等时即止，假如此商为 $\sum_{k=-m}^{\nu-1}c_kD^k$；

3. 求 $y=\sum_{k=-m}^{\nu-1}c_kD^kq(x)$，此即为(11.1)之解。——譯者注

是(11.1)的解。

如果 $q(x)$ 是 $e^{\lambda x}$ 与 x 的多項式 $Q(x)$ 的乘积，則命 $y=e^{\lambda x}z$. 由(11.9)可知，(11.1)成为

$$f(D+\lambda)z=Q(x)❶,$$

等式右端是 x 的多項式。

注意 在 $q(x)=c_1q_1(x)+c_2q_2(x)+\cdots+c_mq_m(x)$ 的情况下，設 $y=\varphi_j(x)$ 是

$$f(D)y=q_j(x)\quad(j=1,\ 2,\ \cdots,\ m)\tag{13.6}$$

的一个解，则不难証明

$$y=c_1\varphi_1(x)+c_2\varphi_2(x)+\cdots+c_m\varphi_m(x)$$

就是(11.1)的解。

于是利用这一事实可求(11.1)的解，至于(13.6)，譬如在 $q_j(x)$ 等于 $e^{\lambda_j x}$ 与 x 的多項式的乘积的情况下，可应用前述方法将 $\varphi_j(x)$ 求出。

例 試解 $y''+a^2y=\sin bx\quad(a>0,\ b>0)$.

因为

$$\sin bx=\frac{e^{ibx}-e^{-ibx}}{2i},$$

可先解

$$y''+a^2y=e^{ibx}.\tag{13.7}$$

特征多項式就是 $f(\rho)=\rho^2+a^2$, 命 $y=e^{ibx}z$, 可以得到以

$$f(\rho+ib)=\rho^2+2ib\rho+a^2-b^2$$

为特征多項式的微分方程

$$z''+2ibz'+(a^2-b^2)z=1.\tag{13.8}$$

在 $a\neq b$ 的情况下，显然 $z=1/(a^2-b^2)$ 是它的解。从而得到(13.7)的解为

$$y=\frac{e^{ibx}}{a^2-b^2}.$$

同样，作为

$$y''+a^2y=e^{-ibx}\tag{13.9}$$

的解是

$$y=\frac{e^{-ibx}}{a^2-b^2},$$

因而所給方程的解为

❶ 此时一般地将多項式 $f(D+\lambda)$ 化为多項式 $g(D)$，用上法解 $g(D)z=Q(x)$ 即可。——譯者注

$$y=\frac{1}{2i}\left(\frac{e^{ibx}}{a^2-b^2}-\frac{e^{-ibx}}{a^2-b^2}\right)=\frac{\sin bx}{a^2-b^2}\text{❶}.$$

其通解就是
$$y=A\sin ax+B\cos ax+\frac{\sin bx}{a^2-b^2}.$$

在 $a=b$ 的情况下,

$$\frac{1}{f(\rho+ia)}=\frac{1}{\rho^2+2ia\rho}=\frac{1}{2ia\rho}\left(1-\frac{\rho}{2ia}+\cdots\right),$$

因而得到(13.8)的解

$$z=\left(\frac{1}{2ia}D^{-1}+\frac{1}{4a^2}\right)1$$
$$=\frac{1}{2ia}x+(\text{常数}).$$

取适当的积分常数,则有

$$z=x/2ia,$$

从而得到(13.7)的解为

$$y=xe^{iax}/2ia.$$

在此式内以 $-i$ 代 i,就得到(13.9)的解

$$y=-xe^{-iax}/2ia.$$

从而得到所給方程的一个解

$$y=-\frac{x}{2a}\cos ax.$$

其通解就是
$$y=A\sin ax+\left(B-\frac{x}{2a}\right)\cos ax.$$

§ 14 Euler 型綫性微分方程

形如

$$a_nx^ny^{(n)}+a_{n-1}x^{n-1}y^{(n-1)}+\cdots+a_0y=q(x) \tag{14.1}$$

---

❶ 理由是根据本节注意所云;或可如下直接驗明:

$y_1=\dfrac{e^{ibx}}{a^2-b^2}$ 为 $y''+a^2y=e^{ibx}$ 之解,故 $y_1''+a^2y_1=e^{+ibx}$, (1)

$y_2=\dfrac{e^{-ibx}}{a^2-b^2}$ 为 $y''+a^2y=e^{-ibx}$ 之解,故 $y_2''+a^2y_2=e^{-ibx}$. (2)

而
$$\frac{e^{ibx}-e^{-ibx}}{2i}=\sin bx,$$

于是以(1)－(2),用 $2i$ 除之,即得 $\left(\dfrac{y_1-y_2}{2i}\right)''+a^2\left(\dfrac{y_1-y_2}{2i}\right)=\sin bx$,故 $\dfrac{y_1-y_2}{2i}$ 为原方程之一解。——譯者注

的方程叫做 Euler **型綫性微分方程**，此处 $a_0, a_1, \cdots, a_n$ 是常数。这种方程当取 $t=\log x$ 为自变数时，可化为常系数綫性微分方程。为了說明这一点，利用关于 t 的微分算子 D.

首先，显然有 $xy'=Dy$. 于此假定一般形式为

$$x^k y^{(k)}=D(D-1)\cdots(D-k+1)y, \tag{14.2}$$

則有

$$\begin{aligned}x^{k+1}y^{(k+1)}&=x\frac{d}{dx}(x^k y^{(k)})-kx^k y^{(k)}\\&=D^2(D-1)\cdots(D-k+1)y-kD(D-1)\cdots(D-k+1)y\\&=D(D-1)\cdots(D-k)y.\end{aligned}$$

这就是在(14.2)内以 $k+1$ 代 k 所得的結果，因而可知(14.2)对于所有自然数 k 均成立。

所以命

$$\begin{aligned}f(\rho)=a_n\rho(\rho-1)\cdots(\rho-n+1)\\+a_{n-1}\rho(\rho-1)\cdots(\rho-n+2)+\cdots+a_1\rho+a_0,\end{aligned}$$

(14.1)就成为常系数綫性微分方程

$$f(D)y=q(e^t). \tag{14.3}$$

由于这个緣故，$f(\rho)$ 叫做(14.1)的**特征多项式**，而 $f(\rho)=0$ 叫做它的**特征方程**。应用前节所述方法就可以解(14.3)。

例 試解 $$x^2y''+xy'-y=\frac{x}{1-x^2}.$$

它的特征多项式是 $f(\rho)=\rho^2-1$. 由于

$$\frac{1}{\rho^2-1}=\frac{1}{2}\left(\frac{1}{\rho-1}-\frac{1}{\rho+1}\right),$$

并用 D 表示关于 $t=\log x$ 的微分，可以得到

$$y=\frac{1}{2}\{(D-1)^{-1}-(D+1)^{-1}\}\frac{x}{1-x^2}.$$

再从

$$(D-1)^{-1}\frac{x}{1-x^2}=e^t\left\{C_1+\int e^{-t}\frac{e^t}{1-e^{2t}}dt\right\}❶$$

$$=e^t\left\{C_1-\frac{1}{2}\log(e^{-2t}-1)\right\}$$

$$=x\left\{C_1+\frac{1}{2}\log x-\frac{1}{2}\log\left(\frac{1}{x}-x\right)\right\},$$

$$(D+1)^{-1}\frac{x}{1-x^2}=e^{-t}\left\{C_2+\int e^t\frac{e^t}{1-e^{2t}}dt\right\}$$

$$=e^{-t}\left\{C_2-\frac{1}{2}\log(1-e^{2t})\right\}$$

$$=x^{-1}\left\{C_2-\frac{1}{2}\log x-\frac{1}{2}\log\left(\frac{1}{x}-x\right)\right\}.$$

可知通解就是

$$y=C_1x+\frac{C_2}{x}+\frac{1}{4}\left(\frac{1}{x}+x\right)\log x+\frac{1}{4}\left(\frac{1}{x}-x\right)\log\left(\frac{1}{x}-x\right).$$

习　　題

試求下列方程的通解：

1. $y'=e^{x+y}$　　答　$y=-\log(C-e^x)$
2. $(x^2-y^2)y'+2xy=0$　　答　$3x^2y-y^3=C$
3. $2y^2-2xyy'+x^2y'^2=x^2$　　答　$y=x\sin\log Cx$
4. $4x(y+1)y'$ $=-(x+y+1)(x-y-1)$　　答　$3(y+1)^2=\sqrt{Cx}-x^2$
5. $y'-y/x=y^2\sin x$　　答　$y=\dfrac{x}{x\cos x-\sin x+C}$
6. $(x^2-1)y'+y=x+1$　　答　$y=\sqrt{\dfrac{x+1}{x-1}}\{C+\log(x+\sqrt{x^2-1})\}$
7. $y'\cos x+y\sin x=\sin x\cos x$　　答　$y=\cos x\{C-\log\cos x\}$
8. $y''+2y'+2y=\sin x$　　答　$y=\left(Ae^{-x}+\dfrac{1}{5}\right)\sin x+\left(Be^{-x}-\dfrac{2}{5}\right)\cos x$

---

❶ 因 $(D-1)^{-1}\dfrac{x}{1-x^2}=(D-1)^{-1}\dfrac{e^t}{1-e^{2t}}$. 設合 $(D-1)^{-1}\dfrac{e^t}{1-e^{2t}}=y(t)$，則依定义，$(D-1)y=\dfrac{e^t}{1-e^{2t}}$，卽 $\dfrac{dy}{dt}-y=\dfrac{e^t}{1-e^{2t}}$，此为一阶綫性方程，再用(9.8)卽得。——譯者注

9. $y'' - y = \cosh x$ 答 $y = Ae^{x} + Be^{-x} + \frac{1}{2} x \sinh x$

10. $y^{\text{IV}} - 2y'' + y = x^2$ 答 $y = e^{x}(A + Bx) + e^{-x}(C + Dx) + x^2 + 4$

11. $x^2y'' + xy' + y = x$ 答 $y = A \sin \log x + B \cos \log x + \frac{1}{2} x$

12. $x^2y'' + xy' - y = x$ 答 $y = x\left(A + \frac{1}{2} \log x\right) + Bx^{-1}$

13. $x^2y'' - xy' + y = x$ 答 $y = x\left\{A + B \log x + \frac{1}{2} (\log x)^2\right\}$

14. $x^2y'' - xy' + 2y = x$ 答 $y = x\{A \sin \log x + B \cos \log x + 1\}$

15. $x^2y'' - 2y = \frac{x}{1+x}$ 答 $y = Ax^2 + Bx^{-1} - \frac{1}{3}\left(x + 1 - x^2 \log \frac{x+1}{x} - \frac{1}{x} \log(x+1)\right)$

16. $y'''y' = 3y''^2$ 答 $x = A + By + Cy^2$

17. $yy'' = y'^2 - 1$ 答 $y = \frac{1}{2B}\left(Ae^{Bx} - \frac{1}{Ae^{Bx}}\right)$

18. $y'y''' + y''^2 = 0$ 答 $(y + C)^2 = (Ax + B)^3$

第2章　基础定理

在本章中要叙述一些应先知道的作为理論出发点的基础定理。如果在尽可能广泛的条件下来闡述理論，那么本章就应該用另一种形式来写，但在本书中无此必要。为了易于理解与使用，在叙述上采取了优良的古典的方法，即：在实变数的情况下采用逐次逼近法，在复变数的情况下采用优級数的方法。

§15　Cauchy 存在定理(实变数)

考察已解出未知函数 y 的 n 阶导数的 n 阶微分方程

$$y^{(n)}=f(x, y, y', \cdots, y^{(n-1)}). \qquad (15.1)$$

此时命　$y_1=y,\ y_2=y',\ \cdots,\ y_n=y^{(n-1)}$，則

$$y_1'=y_2,\ y_2'=y_3,\ \cdots,\ y_{n-1}'=y_n,\ y_n'=f(x, y_1, y_2, \cdots, y_n).$$

因此，当考虑一般方程組

$$y_j'=f_j(x, y_1, \cdots, y_n)\quad (j=1, 2, \cdots, n) \qquad (15.2)$$

时，就包含了作为特殊情况的 n 阶微分方程(15.1)。現在把关于(15.2)的 Cauchy 存在定理写为如下形式。

定理1　若(15.2)的右端在

$$|x-a|\leqslant r,\quad |y_1-b_1|\leqslant\rho,\quad \cdots,\quad |y_n-b_n|\leqslant\rho \qquad (15.3)$$

上 (1) 連續，因而

$$|f_j(x, y_1, \cdots, y_n)|\leqslant M\quad (j=1, 2, \cdots, n), \qquad (15.4)$$

并且 (2) 滿足 Lipschitz 条件：

$$|f_j(x, y_1, \cdots, y_n)-f_j(x, z_1, \cdots, z_n)|$$

$$\leqslant\sum_{k=1}^{n} L_k|y_k-z_k|\quad (j=1, 2, \cdots, n), \qquad (15.5)$$

其中 $L_1, \cdots, L_k$ 为常数，则(15.2)具有满足初始条件：当 $x=a$ 时，$y_1=b_1, \cdots, y_n=b_n$ 的唯一解，且此解至少在

$$|x-a|\leqslant r'=\min\left(r, \frac{\rho}{M}\right) \tag{15.6}$$

上存在着。

不論方程的个数 n 是多少，証明方法几乎一样。因此，为了避免式子变得复杂，在 $n=2$ 的情况下进行証明。因之将已知方程組写成

$$y'=f(x, y, z), \qquad z'=g(x, y, z), \tag{15.7}$$

它們的右端在

$$|x-a|\leqslant r, \quad |y-b|\leqslant\rho, \quad |z-c|\leqslant\rho \tag{15.8}$$

上連續，因而

$$|f(x, y, z)|\leqslant M, \qquad |g(x, y, z)|\leqslant M, \tag{15.9}$$

并且满足 Lipschitz 条件：

$$\left.\begin{array}{l}|f(x, y_1, z_1)-f(x, y_2, z_2)|\\ |g(x, y_1, z_1)-g(x, y_2, z_2)|\end{array}\right\}\leqslant A|y_1-y_2|+B|z_1-z_2|. \tag{15.10}$$

設

$$\varphi_0(x)=b, \qquad \psi_0(x)=c,$$

一般地假若 $\varphi_k(x)$，$\psi_k(x)$ 已被定义，则由

$$\left.\begin{array}{l}\varphi_{k+1}(x)=b+\int_a^x f(x, \varphi_k(x), \psi_k(x))dx\\ \psi_{k+1}(x)=c+\int_a^x g(x, \varphi_k(x), \psi_k(x))dx\end{array}\right\} \tag{15.11}$$

来定义 $\varphi_{k+1}(x)$，$\psi_{k+1}(x)$。$\varphi_k(x)$，$\psi_k(x)$ 叫做第 k 次近似。今設

$$|f(x, b, c)|\leqslant M_0, \qquad |g(x, b, c)|\leqslant M_0,$$

则

$$\varphi_1(x)=b+\int_a^x f(x, b, c)dx, \quad \psi_1(x)=c+\int_a^x g(x, b, c)\,dx$$

被定义在 $|x-a|\leqslant r$ 上，且满足

$$\left.\begin{array}{l}|\varphi_1(x)-b|\\|\psi_1(x)-c|\end{array}\right\}\leqslant M_0|x-a|. \tag{15.12}$$

显然 $M_0\leqslant M$，所以此式的右端在区間(15.6)上不会越过 ρ. 一般地，当 $\varphi_k(x)$, $\psi_k(x)$ 在区間(15.6)上被定义，并且满足

$$\left.\begin{array}{l}|\varphi_k(x)-b|\\|\psi_k(x)-c|\end{array}\right\}\leqslant M|x-a| \tag{15.13}$$

时，则此式右端在区間 (15.6) 上不会越过 ρ; 从而，依 (15.11), $\varphi_{k+1}(x)$, $\psi_{k+1}(x)$在区間 (15.6) 上被定义了，且在 (15.13) 内以 $k+1$ 代換 k 后不等式仍成立。

所以 $\varphi_k(x)$, $\psi_k(x)$对于所有自然数，在区間(15.6)上都被定义并满足(15.13)❶。

其次，姑且設已經知道函数列 $\{\varphi_k(x)\}$ 与 $\{\psi_k(x)\}$ 是一致收斂的。今对(15.11)使得 $k\to\infty$，并設

$$\varphi(x)=\lim\varphi_k(x),\quad \psi(x)=\lim\psi_k(x), \tag{15.14}$$

由是可以得到

$$\left.\begin{array}{l}\varphi(x)=b+\int_a^x f(x,\varphi(x),\psi(x))dx,\\ \psi(x)=c+\int_a^x g(x,\varphi(x),\psi(x))dx.\end{array}\right\}❷ \tag{15.15}$$

在此命 $x=a$，則 $\varphi(a)=b$, $\psi(a)=c$. 再关于 x 微分，就得到

$$\varphi'(x)=f(x,\varphi(x),\psi(x)),\quad \psi'(x)=g(x,\varphi(x),\psi(x)),$$

从而 $y=\varphi(x)$, $z=\psi(x)$ 是满足在 $x=a$ 时 $y=b$, $z=c$ 这个初始条件的解，并且存在于区間(15.6)上。

要証明函数列 $\{\varphi_k(x)\}$, $\{\psi_k(x)\}$ 的一致收斂性，只須証明以

❶ 由"今設…"起至此为止的这段内容是确切地説明用数学归納法来定义满足(15.13)的 $\varphi_k(x)$, $\psi_k(x)$. 再注意到(15.7)在(15.8)上連續一事，可知 $\varphi_k(x)$, $\psi_k(x)$ 也是連續的。——譯者注

❷ 注意 f, φ_k, ψ_k 均連續以及后二者一致收斂这些条件即可得出。——譯者注

$\varphi_k(x)-\varphi_{k-1}(x)$, $\psi_k(x)-\psi_{k-1}(x)$ 为通項的級数的一致收斂性就可以了。

从(15.11)减去在(15.11)内以 $k-1$ 代其中的 k 所得到的式子，就有

$$\varphi_{k+1}(x)-\varphi_k(x)$$
$$=\int_a^x \{f(x, \varphi_k(x), \psi_k(x))-f(x, \varphi_{k-1}(x), \psi_{k-1}(x))\}dx,$$
$$\psi_{k+1}(x)-\psi_k(x)$$
$$=\int_a^x \{g(x, \varphi_k(x), \psi_k(x))-g(x, \varphi_{k-1}(x), \psi_{k-1}(x))\}dx,$$

由 Lipschitz 条件(15.10)就得到

$$\left.\begin{array}{l}|\varphi_{k+1}(x)-\varphi_k(x)| \\ |\psi_{k+1}(x)-\psi_k(x)|\end{array}\right\}$$
$$\leqslant\left|\int_a^x\{A|\varphi_k(x)-\varphi_{k-1}(x)|+B|\psi_k(x)-\psi_{k-1}(x)|\}dx\right|. \tag{15.16}$$

首先，由于 $\varphi_0(x)=b$, $\psi_0(x)=c$，可将(15.12)写成

$$\left.\begin{array}{l}|\varphi_1(x)-\varphi_0(x)| \\ |\psi_1(x)-\psi_0(x)|\end{array}\right\}\leqslant M_0|x-a|.$$

今設其一般形式为

$$\left.\begin{array}{l}|\varphi_k(x)-\varphi_{k-1}(x)| \\ |\psi_k(x)-\psi_{k-1}(x)|\end{array}\right\}\leqslant M_0\frac{(A+B)^{k-1}|x-a|^k}{k!}, \tag{15.17}$$

則(15.16)的右端就

$$\leqslant\left|\int_a^x M_0\frac{(A+B)^k|x-a|^k}{k!}dx\right|=M_0\frac{(A+B)^k|x-a|^{k+1}}{(k+1)!},$$

于是可以得到一个在(15.17)内以 $k+1$ 代换 k 而形成的不等式。

这就意味着(15.17)对于所有自然数均成立[1]。

---

[1] 由“首先，由于…”至此的这一段内容是用数学归納法来証明(15.17)。——譯者注

因为以(15.17)的右端为通項的級数在任意有界区間上是一致收斂的❶，所以就証明了以 $\varphi_k(x)-\varphi_{k-1}(x)$，$\psi_k(x)-\psi_{k-1}(x)$ 为通項的級数是一致收斂的。

以上証明了解的存在❷。关于解的唯一性的証明将在下一节进行。

注意 如果偏导数 $\frac{\partial}{\partial y_k}f_j(x, y_1, \cdots, y_n)$ 存在，而且它的絕对值不越过 L_k 时，Lipschitz 条件(15.5)也得到满足。

为了便于理解計算过程，只考虑 $n=2$ 的情形，并設 $f(x, y, z)$ 关于 y，z 的偏导数存在，而且它們的絕对值分别不越过 A，B。

因为

$$F(t)=f(x, y_1+t(y_2-y_1), z_2)+f(x, y_1, z_1+t(z_2-z_1))$$

关于 t 可微，所以在 0 与 1 之間存在 θ，使得

$$F(1)-F(0)=F'(\theta)$$

成立。从而有

$$f(x, y_2, z_2)-f(x, y_1, z_1)=(y_2-y_1)\frac{\partial}{\partial y}f(x, y_1+\theta(y_2-y_1), z_2)$$
$$+(z_2-z_1)\frac{\partial}{\partial z}f(x, y_1, z_1+\theta(z_2-z_1)),$$

由此就得到

$$|f(x, y_2, z_2)-f(x, y_1, z_1)|\leqslant A|y_2-y_1|+B|z_2-z_1|.$$

§16 誤差的估值

設 $\varphi(x)$，$\psi(x)$，$\tilde{\varphi}(x)$，$\tilde{\psi}(x)$ 都是在区間

$$a-r'_-\leqslant x\leqslant a+r'_+ \quad (0<r'_\pm\leqslant r) \tag{16.1}$$

---

❶ 例如在有界区間 $|x-a|\leqslant C$ 上，則

$$\sum_k \frac{M_0(A+B)^k|x-a|^{k+1}}{(k+1)!}\leqslant\frac{M_0}{A+B}\sum_k\frac{((A+B)C)^{k+1}}{(k+1)!},$$

而数項級数 $\sum_k\frac{((A+B)C)^{k+1}}{(k+1)!}$ 却是指数級数 $\sum_k\frac{x^{k+1}}{(k+1)!}$ 在 $(A+B)C$ 处的数值，因而是收斂的，从而上述不等式左端为一致收斂。——譯者注

❷ 解的存在性的条件，Lipschitz 条件并不是必需的。——校者注

上的連續函数，并且满足

$$\varphi(a)=\tilde{\varphi}(a)=b,\quad \psi(a)=\tilde{\psi}(a)=c,$$

这里 $y=\varphi(x)$，$z=\psi(x)$ 是(15.7)的解，$y=\tilde{\varphi}(x)$，$z=\tilde{\psi}(x)$ 满足微分不等式

$$|y'-f(x,\ y,\ z)|\leqslant\varepsilon,\quad |z'-g(x,\ y,\ z)|\leqslant\varepsilon. \tag{16.2}$$

因为对于 $\varphi(x)$，$\psi(x)$，(15.15)成立，另外对于 $\tilde{\varphi}(x)$，$\tilde{\psi}(x)$，

$$\tilde{\varphi}(x)=b+\int_a^x\tilde{\varphi}'(x)dx,\quad \tilde{\psi}(x)=c+\int_a^x\tilde{\psi}'(x)dx$$

成立[1]，所以有

$$\tilde{\varphi}(x)-\varphi(x)=\int_a^x\{\tilde{\varphi}'(x)-f(x,\ \tilde{\varphi}(x),\ \tilde{\psi}(x))\}dx$$
$$+\int_a^x\{f(x,\ \tilde{\varphi}(x),\ \tilde{\psi}(x))-f(x,\ \varphi(x),\ \psi(x))\}dx,$$

从而得到

$$|\tilde{\varphi}(x)-\varphi(x)|$$
$$\leqslant\varepsilon|x-a|+\left|\int_a^x\{A|\tilde{\varphi}(x)-\varphi(x)|+B|\tilde{\psi}(x)-\psi(x)|\}dx\right|.$$

对于 $\tilde{\psi}(x)-\psi(x)$ 也可以得到同样的不等式，并設

$$L=A+B,\ F(x)=\max\{|\tilde{\varphi}(x)-\varphi(x)|,\ |\tilde{\psi}(x)-\psi(x)|\}.$$

就可以得到

$$0\leqslant F(x)\leqslant\varepsilon|x-a|+L\left|\int_a^x F(x)\,dx\right|. \tag{16.3}$$

对于满足这一不等式的函数 $F(x)$，下述定理成立。

定理2　如果在区間 $a-r_-\leqslant x\leqslant a+r_+$ $(r_\pm>0)$ 上連續的函数 $F(x)$ 满足(16.3)，則在这个区間上，下列不等式成立：

$$F(x)\leqslant\frac{\varepsilon}{L}(e^{L|x-a|}-1). \tag{16.4}$$

---

[1] 不妨把此处等式看成是一个假設，不然也須对 $\tilde{\varphi}$，$\tilde{\psi}$ 另加条件（虽然已經假設它們連續，并且可微），例如 $\tilde{\varphi}'$，$\tilde{\psi}'$ 有界及几乎处处連續，或 $\tilde{\varphi}'$，$\tilde{\psi}'$ 連續，以保証此等式成立。——譯者注

由于 $F(x)$ 的連續性，总可找到一个有限的常数 K，使得 $F(x)\leqslant K$。把(16.3)右端的 $F(x)$ 換成 K，就得到

$$F(x)\leqslant\varepsilon|x-a|+KL|x-a|.$$

再把(16.3)右端的 $F(x)$ 換成上一不等式的右端，就得到

$$F(x)\leqslant\varepsilon\{|x-a|+L|x-a|^2/2!\}+KL^2|x-a|^2/2!.$$

一般地，設

$$F(x)\leqslant\varepsilon\{|x-a|+L|x-a|^2/2!+\cdots+L^{k-1}|x-a|^k/k!\}$$
$$+KL^k|x-a|^k/k!,\qquad(16.5)$$

則把(16.3)右端的 $F(x)$ 換成上一不等式的右端之后，就得到全同于在(16.5)內以 $k+1$ 代換 k 所成的不等式，从而可知(16.5)对于所有自然数都成立。于此命 $k\to\infty$，則 (16.5) 的右端向 (16.4)的右端收斂，从而可知(16.4)成立❶。

作为这一定理的結果，我們得到了

$$\left.\begin{array}{l}|\tilde{\varphi}(x)-\varphi(x)|\\|\tilde{\psi}(x)-\psi(x)|\end{array}\right\}\leqslant\frac{\varepsilon}{L}(e^{L|x-a|}-1).\qquad(16.6)$$

一般地說，对于微分方程組(15.2)，下述定理成立。

定理 3 設定理1的假設条件于此成立，并設 (15.2) 的解 $y_j=\varphi_j(x)$ $(j=1, 2, \cdots, n)$ 是存在于区間 $a-r_-\leqslant x\leqslant a+r_+$ $(0<r_\pm\leqslant r)$ 的，且滿足条件：$x=a$ 时，$y_1=b_1, \cdots, y_n=b_n$。再設 $y_j=\tilde{\varphi}_j(x)$ $(j=1, 2, \cdots, n)$ 是微分不等式

$$|y_j'-f_j(x, y_1, \cdots, y_n)|\leqslant\varepsilon\quad(j=1, 2, \cdots, n)\qquad(16.7)$$

的解，存在于区間 $a-r_-\leqslant x\leqslant a+r_+$ 上且滿足条件：$x=a$ 时，$y_1=b_1, \cdots, y_n=b_n$。

此时在区間 $a-r_-\leqslant x\leqslant a+r_+$ 上就有

$$|\tilde{\varphi}_j(x)-\varphi_j(x)|\leqslant\frac{\varepsilon}{L}(e^{L|x-a|}-1)\quad(j=1, 2, \cdots, n)\qquad(16.8)$$

❶ 定理2在此处起了一个輔助定理作用。——譯者注

成立。此处 $L=L_1+L_2+\cdots+L_n$。

特别当 $y_j=\tilde{\varphi}_j(x)$ $(j=1, 2, \cdots, n)$ 也是(15.2)的一个解时，利用在(16.8)内取 $\varepsilon=0$ 这一条件，就可以得到 $\tilde{\varphi}_j(x)=\varphi_j(x)$，此即意味着(15.2)的解必然唯一地满足条件：当 $x=a$ 时 $y_1=b_1, \cdots, y_n=b_n$。于是定理1的全部結論都得到証明。

$x=a$ 时，$y_1=b_1, \cdots, y_n=b_n$ 这一条件叫做**初始条件**，而 $a, b_1, \cdots, b_n$ 叫做**初値**。

§17 解的存在区間

回顾定理1的証明可以知道，如果逐次近似值 $\varphi_k(x)$，$\psi_k(x)$ 在区間 $a-r_-\leqslant x\leqslant a+r_+$ $(0\leqslant r_\pm\leqslant r)$ 上都被定义，并且满足

$$|\varphi_k(x)-b|\leqslant\rho, \quad |\psi_k(x)-c|\leqslant\rho, \tag{17.1}$$

则当 $k\to\infty$ 时，函数列 $\{\varphi_k(x)\}$，$\{\psi_k(x)\}$ 在区間 $a-r_-\leqslant x\leqslant a+r_+$ 上一致收斂，此时极限函数 $\varphi(x)$，$\psi(x)$ 在区間 $a-r_-\leqslant x\leqslant a+r_+$ 上被定义，它是(15.7)的解而满足条件：当 $x=a$ 时 $y=b$，$z=c$[1]。

以(15.17)的右端为通項的級数的和是

$$M_0\sum_{k=1}^{\infty}\frac{(A+B)^{k-1}|x-a|^k}{k!}=\frac{M_0}{A+B}\left(e^{(A+B)|x-a|}-1\right). \tag{17.2}$$

設这一等式的右端不越过 ρ 的区間为 $a-\delta\leqslant x\leqslant a+\delta$，就有

$$\frac{M_0}{A+B}\left(e^{(A+B)\delta}-1\right)=\rho.$$

---

[1] 依規定，逐次近似定义为

$$\varphi_0(x)=b, \quad \psi_0(x)=c,$$

$$\varphi_{k+1}(x)=b+\int_a^x f(x, \varphi_k, \psi_k)dx, \quad \psi_{k+1}(x)=c+\int_a^x g(x, \varphi_k, \psi_k)dx,$$

故
$$\varphi_{k+1}(x)-\varphi_k(x)=\int_a^x(f(x, \varphi_k, \psi_k)-f(x, \varphi_{k-1}, \psi_{k-1}))dx,$$

$$\psi_{k+1}(x)-\psi_k(x)=\int_a^x(g(x, \varphi_k, \psi_k)-g(x, \varphi_{k-1}, \psi_{k-1}))dx,$$

但依此假設 $|\varphi_k-b|\leqslant\rho$，$|\psi_k-c|\leqslant\rho$（在定理1中这是由于在区間(15.6)的結果），故得依 Lipschitz 条件，以下和定理1中的証明同。——譯者注

由此解出 δ，就得到

$$\delta=\frac{1}{A+B}\log\left(1+\frac{A+B}{M_0}\rho\right).$$

于此要証逐次近似值确乎能够定义于区間❶

$$|x-a|\leqslant r''=\min\left\{r,\ \frac{1}{A+B}\log\left(1+\frac{A+B}{M_0}\rho\right)\right\}. \quad (17.3)$$

首先知道，$\varphi_1(x)$，$\psi_1(x)$在区間(17.3)上被定义，并且满足在(15.17)内命 $k=1$ 所得到的式子。設对于 $k\leqslant n$，在区間(17.3)上 $\varphi_k(x)$，$\psi_k(x)$被定义，并满足(15.17)，則

$$|\varphi_n(x)-b|\leqslant\sum_{k=1}^{n}|\varphi_k(x)-\varphi_{k-1}(x)|,$$

$$|\psi_n(x)-c|\leqslant\sum_{k=1}^{n}|\psi_k(x)-\psi_{k-1}(x)|$$

成立，由(15.17)得到

$$\left.\begin{matrix}|\varphi_n(x)-b|\\|\psi_n(x)-c|\end{matrix}\right\}\leqslant M_0\sum_{k=1}^{n}\frac{(A+B)^{k-1}|x-a|^k}{k!}. \quad (17.4)$$

很明显，此式的右端比(17.2)要小。因为 $r''\leqslant\delta$，再由 δ 的定义，可知在区間 (17.3) 上 (17.4) 的右端不越过 ρ，从而 (17.1) 对于 $k=n$ 成立，继之 $\varphi_{n+1}(x)$，$\psi_{n+1}(x)$ 在区間 (17.3) 上被定义，再仿 § 15 中的証法可知不等式(15.17)对于 $k=n+1$ 也成立。

于此关于 k 进行的归納法的証明已經告終，因而各个逐次近似值在区間 (17.3) 上被定义，且满足 (17.1)，从而可以說解在区間(17.3)上存在❷。一般地說，对于微分方程組 (15.2)，下述定理成立。

定理 4 在定理 1 的假設条件之下，(15.2) 的满足条件：当

❶ 以下当明确逐次近似值在(17.3)上满足(17.1)(这一点是用归納法定义逐次近似值所要求的)。——譯者注

❷ 本节至此，又把定理 1 証明了一次，不过逐次近似值不在(15.6)上而在(17.3)上考虑罢了。因此，才有下述定理 4。——譯者注

$x=a$ 时 $y_1=b_1, \cdots, y_n=b_n$ 的解在区間

$$|x-a| \leqslant r'' = \min\left\{r, \frac{1}{L}\log\left(1+\frac{L\rho}{M_0}\right)\right\} \tag{17.5}$$

上唯一存在。此处 $L=L_1+L_2+\cdots+L_n$。

注意 为了簡单起見，已取(15.3)为(15.2)的右端的連續范圍，也可以更一般化，取

$$a-r_- \leqslant x \leqslant a+r_+, \ |y_1-b_1| \leqslant \rho, \ \cdots, \ |y_n-b_n| \leqslant \rho \tag{17.6}$$

为(15.2)的右端的連續范圍。在此情况下，若由下述关系

$$r'_\pm = \min\left\{r_\pm, \frac{\rho}{M}\right\}, \tag{17.7}$$

$$r''_\pm = \min\left\{r_\pm, \frac{1}{L}\log\left(1+\frac{L\rho}{M_0}\right)\right\} \tag{17.8}$$

定义 $r'_\pm$, $r''_\pm$，則作为对应于 (15.6) 的解的存在区間就是 $a-r'_- \leqslant x \leqslant a+r'_+$，作为对应于(17.5)的解的存在区間就是 $a-r''_- \leqslant x \leqslant a+r''_+$。

現在特别来考虑綫性微分方程

$$\frac{dy_j}{dx} = \sum_{k=1}^{n} p_{jk}(x)y_k + q_j(x) \quad (j=1, 2, \cdots, n). \tag{17.9}$$

設 $p_{jk}(x)$, $q_j(x)$ 都在区間 $\alpha \leqslant x \leqslant \alpha'$ 上連續。从而在这个区間上有下述关系成立：

$$|p_{jk}(x)| \leqslant A, \ |q_j(x)| \leqslant B \quad (j, k=1, 2, \cdots, n),$$

A 与 B 是可找到的两个常数。对于任意所給值 $b_1, \cdots, b_n$，命

$$b = \max\{|b_1|, |b_2|, \cdots, |b_n|\},$$

則无論正数 ρ 多么大，(17.9)的右端在

$$\alpha \leqslant x \leqslant \alpha', \ |y_1-b_1| \leqslant \rho, \ \cdots, \ |y_n-b_n| \leqslant \rho$$

上連續，并且它的絕对值不会越过

$$M = nA(b+\rho)+B. \tag{17.10}$$

特别在取 $y_1=b_1, \cdots, y_n=b_n$ 的情况下，(17.9)的右端的絕对值不越过

$$M_0 = nAb+B.$$

在現在情况下，使 Lipschitz 条件中出現的常数 L_k 都等于 A，因

此,取 $\alpha\leqslant a\leqslant\alpha'$, 并取

$$r_+=\alpha'-a,\ \ r_-=a-\alpha,$$

$$r''_{\pm}=\min\left\{r_{\pm},\ \frac{1}{nA}\log\left(1+\frac{nA\rho}{M_0}\right)\right\},$$

則(17.9)的满足条件:当 $x=a$ 时, $y_1=b_1,\ \cdots,\ y_n=b_n$ 解的存在区間是 $a-r''_-\leqslant x\leqslant a+r''_+$。因为 $A,\ M_0$ 都是与 ρ 无关的数,故当 ρ 取充分大的值时就有 $r''_{\pm}=r_{\pm}$。所以解确实存在于区間 $\alpha\leqslant x\leqslant\alpha'$,于是得到下述定理。

定理 5 綫性微分方程(17.9)的解确实存在于 $p_{jk}(x),\ q_j(x)$ $(j,\ k=1,\ 2,\ \cdots,\ n)$ 連續的区間上。

习題 取以(17.10)所定义之值为 M, 以(17.7)定义 $r'_{\pm}$, 此时无論取 ρ 的值为多大也不能得 $r'_{\pm}=r_{\pm}$。

注意 在定理5的証明中,曾假定区間是閉区間,如是开区間結果亦一样。例如,設 $p_{jk}(x),\ q_j(x)$ 在区間 $\alpha_0<x<\alpha_1$ 內連續。取

$$\alpha_0<\alpha<a<\alpha'<\alpha_1,$$

則满足条件:当 $x=a$ 时, $y_1=b_1,\ \cdots,\ y_n=b_n$ 的解在区間 $\alpha\leqslant x\leqslant\alpha'$ 上存在,同时 α,α' 分别取任意接近 α_0,α_1 之值,所以这样的解在区間 $\alpha_0<x<\alpha_1$ 內存在。

§ 18 解的拓展(实变数)

設(15.2)的右端在 $(n+1)$ 維空間的一个开集合 D 連續。点 $(a,\ b_1,\ \cdots,\ b_n)$ 属于 D, 当正数 $r,\ \rho$ 之值充分小时, D 就完全包含了(15.3),此时,若存在着常数 L_k, 使得(15.5)在(15.3)成立,則說(15.2)在点 $(a,\ b_1,\ \cdots,\ b_n)$ 满足 Lipschitz 条件。如果(15.2)在 D 的各个点都满足 Lipschitz 条件,我們說(15.2)在 D 內满足 Lipschitz 条件。在此情况下,在 D 的各个点 $(a,\ b_1,\ \cdots,\ b_n)$ 的充分小的邻域內,(15.5)成立,而 L_k 与点 $(a,\ b_1,\ \cdots,\ b_n)$ 及其邻域的取法有关。因此,对于属于 D 的任意两点 $(x,y_1,\cdots,y_n),\ (x,z_1,\cdots,z_n)$ 使得(15.5)都可以成立的 L_k 应如何取法,我們不得而知。如果

此为可能的話，我們說(15.2)在 D 内一致地滿足 Lipschitz 条件。

現在考慮 (15.2) 在 D 内滿足 Lipschitz 条件的情况。設点 $(a, b_1, \cdots, b_n)$ 属于 D，取正数 r，ρ 使得定理1的条件滿足，則在含 a 于其内部的区間内滿足条件：当 $x=a$ 时，$y_1=b_1, \cdots, y_n=b_n$ 的解唯一存在。設这一解是 $y_j=\varphi_j(x)$ $(j=1, 2, \cdots, n)$，且存在于区間 $\alpha<x<\alpha'$ 内。如果当 $x\to\alpha+0$ 时，$\varphi_j(x)\to\beta_j$，且 $(\alpha, \beta_1, \cdots, \beta_n)$ 属于 D，則滿足条件：当 $x=\alpha$ 时，$y_1=\beta_1, \cdots, y_n=\beta_n$ 的解在含 α 于其内部的区間 $\alpha_0<x<\alpha_1$ 内唯一存在。設这一解为 $y_j=\psi_j(x)$ $(j=1, 2, \cdots, n)$，則在定义 $\varphi_j(\alpha)=\beta_j$ 之后的 $y_j=\varphi_j(x)$ 也是滿足条件：当 $x=\alpha$ 时 $y_j=\beta_j$ 的解❶；因此，在区間 $\alpha\leqslant x<\alpha'$ 与区間 $\alpha_0<x<\alpha_1$ 的共同部分必然有 $\varphi_j(x)=\psi_j(x)$。所以在 $\alpha_0<x<\alpha$ 内 $\varphi_j(x)$ 之値可以用 $\varphi_j(x)=\psi_j(x)$ 来定义。这样，$y_j=\varphi_j(x)$ $(j=1, 2, \cdots, n)$ 就是一个在更广的区間内的解，这一区間包含了

---

❶ 为了清楚地說明它是(15.2)的滿足初始条件：当 $x=\alpha$ 时，$y_j=\beta_j$ 的解，特令

$$\bar{\varphi}_j(x)=\begin{cases}\varphi_j(x), & \text{当 } \alpha<x<\alpha' \text{ 时,}\\ \beta_j, & \text{当 } x=\alpha \text{ 时。}\end{cases}$$

根据 $y_j=\varphi_j(x)$ 定义，并依(15.15)，有

$$\varphi_j(x)=b_j+\int_a^x f_j(x, \varphi_1(x), \cdots, \varphi_n(x))dx, \quad \text{当 } \alpha<x<\alpha' \text{ 时,} \tag{1}$$

此即

$$\bar{\varphi}_j(x)=b_j+\int_a^x f_j(x, \bar{\varphi}_1(x), \cdots, \bar{\varphi}_n(x))dx, \quad \text{当 } \alpha<x<\alpha' \text{ 时。} \tag{2}$$

再对(1)两端取极限：

$$\lim_{x\to\alpha^+}\varphi_j(x)=b_j+\lim_{x\to\alpha^+}\int_a^x f_j(x, \varphi_1(x), \cdots, \varphi_n(x))\,dx,$$

即
$$\bar{\varphi}_j(\alpha)=\beta_j=\varphi_j(\alpha^+)=b_j+\int_a^\alpha f_j(x, \varphi_1(x), \cdots, \varphi_n(x))dx.$$

但
$$\int_a^\alpha f_j(x, \varphi_1(x), \cdots, \varphi_n(x))dx=\int_a^\alpha f_j(x, \bar{\varphi}(x), \cdots, \bar{\varphi}_n(x))dx$$

$$\Big[\text{因} \int_a^\alpha f_j(x, \bar{\varphi}_1(x), \cdots, \bar{\varphi}_n(x))\,dx=\int_a^b+\int_b^\alpha, \quad (\text{此处 } \alpha<b<\alpha)$$

$$=\int_a^b f_j(x, \varphi_1(x), \cdots, \varphi_n(x))\,dx+\int_b^\alpha f_j(x, \bar{\varphi}_1(x), \cdots, \bar{\varphi}_n(x))dx,$$

最初定义 $\varphi_j(x)$ 的区間的左端点 α. 象这样保存了作为解的这一性质，同时又推广了它的定义区間的这一事实叫做**解的拓展**。因而上述事实可以表述为如下形式:

如果当 $x\to\alpha+0$ 时 $\varphi_j(x)\to\beta_j$, 而且 $(\alpha, \beta_1, \cdots, \beta_n)$ 属于 D, 则解 $y_j=\varphi_j(x)$ $(j=1, 2, \cdots, n)$ 可越过 α 而拓展。

在此問題中，如果选取一个适当的递减而趋近于 α 的数列 $\{x_k\}$, 使得 $\varphi_j(x_k)\to\beta_j$, 并且 $(\alpha, \beta_1, \cdots, \beta_n)$ 属于 D, 那么結果又当如何呢?

适当地选取正数 r, ρ, 使得

$$|x-\alpha|\leqslant r,\ |y_1-\beta_1|\leqslant\rho,\ \cdots,\ |y_n-\beta_n|\leqslant\rho \tag{18.1}$$

含于 D 内，于是就可以假定(15.4), (15.5)也被满足。

如果

$$|\xi-\alpha|\leqslant\frac{r}{2},\quad |\eta_1-\beta_1|\leqslant\frac{\rho}{2},\ \cdots,\ |\eta_n-\beta_n|\leqslant\frac{\rho}{2},$$

故当 $|b-a|$ 足够地小时,

$$\left|\int_a^\alpha f_j(x, \bar{\varphi}_1(x), \cdots, \bar{\varphi}_n(x))\,dx-\int_a^b f_j(x, \varphi_1(x), \cdots, \varphi_n(x))\,dx\right|\leqslant M\,|b-\alpha|.$$

此处 M 为常数。这是由于 $(\alpha, \beta_1, \cdots, \beta_n)\in$ 开集 D, 因之有以 $(\alpha, \beta_1, \cdots, \beta_n)$ 为中心的閉域 $\subseteq D$, 但 $f_j(x, y_1, \cdots, y_n)$ 連續于 D, 当然更連續于此閉域, M 为 f_j 在此閉域所取之最大值，又因 $(x, \varphi_1(x), \cdots, \varphi_n(x))\to(\alpha, \beta_1, \cdots, \beta_n)$, 所以当 $|x-\alpha|$ 足够地小时，必然 $(x, \varphi_1(x), \cdots, \varphi_n(x))\in$ 此閉域，从而此时 $|f(x, \bar{\varphi}_1(x), \cdots, \bar{\varphi}_n(x)|\leqslant M$, 此即說

$$\int_a^\alpha f_j(x, \bar{\varphi}_1(x), \cdots, \bar{\varphi}_n(x))\,dx=\lim_{b\to\alpha^+}\int_a^b f_j(x, \varphi_1(x), \cdots, \varphi_n(x))\,dx$$
$$\left.=\int_a^\alpha f_j(x, \varphi_1, \cdots, \varphi_n)\,dx\right],$$

所以

$$\bar{\varphi}_j(\alpha)=b_j+\int_a^\alpha f_j(x, \bar{\varphi}_1, \cdots, \bar{\varphi}_n)\,dx. \tag{3}$$

(2)与(3)結合，便得

$$\bar{\varphi}_j(x)=b_j+\int_a^x f_j(x, \bar{\varphi}_1, \cdots, \bar{\varphi}_n)\,dx \qquad (\alpha\leqslant x<\alpha');$$

由此,

$$\bar{\varphi}_j'(x)=f_j(x, \bar{\varphi}_1(x), \cdots, \bar{\varphi}_n(x)),$$

特别地，取 $x=\alpha$, 則有

$$\bar{\varphi}_j(\alpha)=d_j+\int_a^\alpha f_j(x, \bar{\varphi}_1, \cdots, \bar{\varphi}_n)\,bx=b_j+\int_a^\alpha f_j(x, \varphi_1, \cdots, \varphi_n)\,dx=\beta_j.$$ ——譯者注

则

$$|x-\xi| \leqslant \frac{r}{2}, \quad |y_1-\eta_1| \leqslant \frac{\rho}{2}, \quad \cdots, \quad |y_n-\eta_n| \leqslant \frac{\rho}{2}$$

含于 (18.1) 内，于是 (15.4)，(15.5) 被满足，从而满足条件：当 $x=\xi$ 时，$y_1=\eta_1$，$\cdots$，$y_n=\eta_n$ 的解在区間

$$|x-\xi| \leqslant \min\left\{\frac{r}{2}, \ \frac{\rho}{2M}\right\} \tag{18.2}$$

上唯一存在。当 k 充分大时，则

$$|x_k-\alpha| \leqslant \frac{r}{2}, \quad |\varphi_1(x_k)-\beta_1| \leqslant \frac{\rho}{2}, \quad \cdots, \quad |\varphi_n(x_k)-\beta_n| \leqslant \frac{\rho}{2},$$

因此可以取

$$\xi=x_k, \quad \eta_1=\varphi_1(x_k), \quad \cdots, \quad \eta_n=\varphi_n(x_k).$$

从而在区間 (18.2) 上解 $y_j=\varphi_j(x)$ $(j=1, 2, \cdots, n)$ 存在。区間 (18.2)——此处命 $\xi=x_k$——当 k 充分大时，包含 α 于其內部，因此解 $y_j=\varphi_j(x)$ $(j=1, 2, \cdots, n)$ 可越过 α 而拓展。

因此，在越过 α 而不能保持解的拓展时，无論怎样选取收斂于 α 的遞減序列 $\{x_k\}$，也不会有 $(x_k, \varphi_1(x_k), \cdots, \varphi_n(x_k))$ 收斂于属于 D 之点的事实发生。由此可以知道，若它們收斂于某一点时，这一个极限点也一定是 D 的界点。这一事实，作为一个定理可以用几何学的語言表述为以下的形式。

定理 6 如果(15.2)的右端在开集合 D 內被定义，并且連續，又满足 Lipschitz 条件，则(15.2)的解曲綫直到 D 的边界都是連續的。

所謂**解曲綫**就是作解的图象时所得到的曲綫。也称它为积分曲綫。

习題 (15.2)的右端在开集合 D 被定义，連續，且在 D 內满足 Lipschitz 条件。如果(15.2)的两个解 $y_j=\varphi_j(x)$，$y_j=\psi_j(x)$ $(j=1, 2, \cdots, n)$都定义在区間 $\alpha<x<\alpha'$ 內，而且在区間 $\alpha<x<\alpha'$ 內有使得 $\varphi_j(a)=\psi_j(a)$ $(j=1, 2, \cdots, n)$的 a 存在，则在区間 $\alpha<x<\alpha'$ 內此两解一致。

§ 19 关于参数的連續性

考慮方程組

$$\frac{dy_j}{dx}=f_j(x, y_1, \cdots, y_n, t) \quad (j=1, 2, \cdots, n) \tag{19.1}$$

的每一方程的右端含有自变数 x，未知函数 $y_1, \cdots, y_n$，此外并含有参数 t 的情形。今設上式的右端定义于$(n+2)$維空間的一个开集合 D，在 D 連續，并且在 D 內对于 t 一致地满足 Lipschitz 条件，也就是說滿足条件：

若$(a, b_1, \cdots, b_n, c)$属于 D，則可取适当的正数 r, ρ, σ，使得对于

$$|x-a|\leqslant r, \ |y_1-b_1|\leqslant\rho, \cdots, |y_n-b_n|\leqslant\rho, \ |t-c|\leqslant\sigma \tag{19.2}$$

中的任意两点

$$(x, y_1, \cdots, y_n, t), \ (x, z_1, \cdots, z_n, t),$$

下一关系成立：

$$|f_j(x, y_1, \cdots, y_n, t)-f_j(x, z_1, \cdots, z_n, t)| \leqslant\sum_{k=1}^{n} L_k|y_k-z_k| \quad (j=1, 2, \cdots, n). \tag{19.3}$$

設滿足条件：当 $x=a$ 时 $y_1=b_1, \cdots, y_n=b_n$ 的 (19.1) 的解为 $y_j=\varphi_j(x,t)\ (j=1, 2, \cdots, n)$，我們来証明：当 $t\to c$ 时，在 $\varphi_j(x, c)$ 定义的区間內，$\varphi_j(x, t)$ 一致收斂于 $\varphi_j(x, c)$。更詳細一些說，对于包含在 $\varphi_j(x, c)\ (j=1, 2, \cdots, n)$ 定义的区間內的一个任意有界的閉区間 $\alpha\leqslant x\leqslant\alpha'$，当 $t-c$ 充分小时，$\varphi_j(x, t)$ 在此一区間 $\alpha\leqslant x\leqslant\alpha'$ 內存在，且当 $t\to c$ 时一致收斂于 $\varphi_j(x, c)$。

設区間 $\alpha\leqslant x\leqslant\alpha'$ 含有 a。如在

$$\alpha\leqslant x\leqslant\alpha', \ |y_j-\varphi_j(x, c)|\leqslant\delta \quad (j=1, 2, \cdots, n), \ |t-c|\leqslant\sigma \tag{19.4}$$

內(19.1)的右端連續,而且(19.3)成立。設关于

$$z_j=y_j-\varphi_j(x, c) \quad (j=1, 2, \cdots, n) \tag{19.5}$$

的方程为

$$\frac{dz_j}{dx}=g_j(x, z_1, \cdots, z_n, t) \quad (j=1, 2, \cdots, n). \tag{19.6}$$

由于有

$$g_j(x, z_1, \cdots, z_n, t)=f_j(x, z_1+\varphi_1(x, c), \cdots, z_n+\varphi_n(x, c), t)$$
$$-f_j(x, \varphi_1(x, c), \cdots, \varphi_n(x, c), c),$$

所以(19.6)的右端在

$$a\leqslant x\leqslant a', \ |z_1|\leqslant\delta, \cdots, |z_n|\leqslant\delta, \ |t-c|\leqslant\sigma$$

連續,并滿足

$$|g_j(x, z_1, \cdots, z_n, t)-g_j(x, u_1, \cdots, u_n, t)| \leqslant\sum_{k=1}^{n} L_k|z_k-u_k|$$
$$(j=1, 2, \cdots, n), \tag{19.7}$$

而且又有

$$g_j(x, 0, \cdots, 0, t)=f_j(x, \varphi_1(x, c), \cdots, \varphi_n(x, c), t)$$
$$-f_j(x, \varphi_1(x, c), \cdots, \varphi_n(x, c), c), \tag{19.8}$$

从而对于任意給定的正数 ε, 只要将 σ 取得充分小,就有

$$|g_j(x, 0, \cdots, 0, t)|\leqslant\varepsilon. \tag{19.9}$$

而

$$z_j=\varphi_j(x, t)-\varphi_j(x, c) \quad (j=1, 2, \cdots, n) \tag{19.10}$$

就是滿足条件:当 $x=a$ 时 $z_j=0(j=1, 2, \cdots, n)$的(19.6)的解❶。

---

❶ 由于 $\varphi_j(x, t)$, $\varphi_j(x, c)$ 定义,可知 $\frac{d\varphi_j(x, t)}{dx}=f_j(x,\varphi_1(x,t),\cdots,\varphi_n(x,t),t)$, 以及 $\frac{d\varphi_j(x, c)}{dx}=f_j(x, \varphi_1(x, c), \cdots, \varphi_n(x, c), c)$, 故

$$\frac{d[\varphi_j(x, t)-\varphi_j(x, c)]}{dx}=f_j(x,\varphi_1(x,t),\cdots,\varphi_n(x,t),t)-f_j(x,\varphi_1(x,c),\cdots,\varphi_n(x,c),c)$$
$$=f_j(x, z_1+\varphi_1(x, c), \cdots, z_n+\varphi_n(x, c), t)-f_j(x, \varphi_1(x, c), \cdots, \varphi_n(x, c), c)$$
$$=g_j(x, z_1, \cdots, z_n, t).$$

又由于 $\varphi_j(x, t)$, $\varphi_j(x, c)$ 滿足初始条件, 故当 $x=a$ 时,

$$\varphi_j(x, t)-\varphi_j(x, c)=b_j-b_j=0.$$ ——譯者注

为了求它的存在区間，可以应用定理 4 的注意。在这一情况下，有

$$r_+=\alpha'-a,\quad r_-=a-\alpha,\quad \rho=\delta,\quad M_0=\varepsilon,$$

如果将 ε 取得充分小，则 $r''_\pm=r_\pm$。所以当 $t-c$ 充分小时，$\varphi_j(x,t)$ $(j=1, 2, \cdots, n)$ 在区間 $\alpha\leqslant x\leqslant\alpha'$ 上被定义。

其次，設 $z_j=0\,(j=1, 2, \cdots, n)$ 是满足条件：当 $x=a$ 时，$z_j=0$ $(j=1, 2, \cdots, n)$ 的(19.6)的解卽(19.10)的近似解，于此可应用定理 3。由不等式(19.9)，$z_j=0$ $(j=1, 2,\cdots,n)$ 满足微分不等式

$$|z'_j-g_j(x, z_1, \cdots, z_n, t)|\leqslant\varepsilon\text{❶},$$

所以誤差估值公式(16.8)就是

$$|\varphi_j(x, t)-\varphi_j(x, c)|\leqslant\frac{\varepsilon}{L}(e^{L|x-a|}-1)\text{❷}.$$

当把 σ 取得充分小的时候，ε 可以任意小，亦即当 $t\to c$ 时，一致地 $\varphi_j(x, t)\to\varphi_j(x, c)$。

所剩的問題是：在(19.4)内(19.3)成立这一假定是否在任何时候都是容許的？根据假定，若将 r, δ, σ 取得相当小，我們可取常数 L_k，使得在(19.2)内(19.3)成立。由于可以取 $b_j=\varphi_j(a, c)$ $(j=1, 2, \cdots, n)$，所以选定包含 a 于其内部的区間 $\alpha\leqslant x\leqslant\alpha'$ 与充分小的正数 δ 之后，(19.4)卽被含于(19.2)内，从而在(19.4)内(19.3)成立❸。因此現在我們的問題是，在适当选取 δ, σ, L_k 之

---

❶ 由于(19.10)的近似解为 $z_j=0$ $(j=1,2,\cdots,n)$，故 $z'_j=0$，以及 $g_j(x, z_1,\cdots, z_n, t)=g_j(x, 0, \cdots, 0, t)$，于是

$$|z'_j-g_j(x, z_1, \cdots, z_n, t)|=|0-g_j(x, 0, \cdots, 0, t)|=|g_j(x, 0, \cdots, 0, t)|,$$

再依(19.9)卽得。——譯者注

❷ 这个不等式是在 $\alpha\leqslant x\leqslant\alpha'$ 上考虑的。又因 $a\in[\alpha, \alpha']$，故在 $\alpha\leqslant x\leqslant\alpha'$ 上，$|x-a|\leqslant\alpha'-\alpha$，从而 $|\varphi_j(x, t)-\varphi_j(x, c)|\leqslant\frac{\varepsilon}{L}(e^{L(\alpha'-\alpha)}-1)$。

这就意味着此不等式与 x 无关，只与 t 有关，也即 $\varphi_j(x, t)$ 一致收斂于 $\varphi_j(x, c)$。——譯者注

❸ 依(15.6)或(17.5)，a 为 $y_j=\varphi_j(x, c)$ 定义域的內点，又 $b_j=\varphi_j(a, c)$ 为 $[b_j-\rho; b_j+\rho]$ 之內点，所以 $(a, \varphi_1(a, c), \cdots, \varphi_n(a, c), c)=(a, b_1, \cdots, b_n, c)$ 在解曲綫上且为(19.2)的內点，因此使得(19.4)含于(19.2)这样的 $[\alpha, \alpha']$ 以及 $\delta>0$ 是可以找到的。——譯者注

后，使得在(19.4)内(19.3)成立的区間 $\alpha \leqslant x \leqslant \alpha'$ 可以有多大？

設 α_0 为含于解 $y_j=\varphi_j(x, c)$ $(j=1, 2, \cdots, n)$ 定义域内的任一点，則可以使区間 $\alpha \leqslant x \leqslant \alpha'$ 任意趋近于 $\alpha_0 < x < \alpha_1$，即可以使 α 任意趋近于 α_0，而 α' 任意趋近于 α_1，命 $\beta_j=\varphi_j(\alpha_0, c)$ $(j=1, 2, \cdots, n)$，取正数 r_0, ρ_0, σ_0 及 L_{0k}，使得对于属于

$$|x-\alpha_0| \leqslant r_0,\ |y_1-\beta_1| \leqslant \rho_0,\ \cdots,\ |y_n-\beta_n| \leqslant \rho_0,\ |t-c| \leqslant \sigma_0 \tag{19.11}$$

的任意两点 $(x, y_1, \cdots, y_n, t)$，$(x, z_1, \cdots, z_n, t)$，

$$|f_j(x, y_1, \cdots, y_n, t)-f_j(x, z_1, \cdots, z_n, t)| \leqslant \sum_{k=1}^{n} L_{0k}|y_k-z_k|$$
$$(j=1, 2, \cdots, n)$$

成立。如果将正数 ε_0，δ_0 取得充分小，則

$$\alpha_0-\varepsilon_0 \leqslant x \leqslant \alpha_0+\varepsilon_0,$$
$$|y_j-\varphi_j(x, c)| \leqslant \delta_0 \quad (j=1, 2, \cdots, n),\ |t-c| \leqslant \sigma_0$$

含于(19.11)内。由于假定可以取 α 使得 $\alpha_0 < \alpha \leqslant \alpha_0+\varepsilon_0$ 成立[1]。設 δ 与 δ_0 之中較小的一个为 δ'，σ 与 σ_0 之中較小的一个为 σ'，而 L_0 与 L_{0k} 之中較大的一个为 L'_k，則在

$$\alpha_0-\varepsilon_0 \leqslant x \leqslant \alpha',$$
$$|y_j-\varphi_j(x, c)| \leqslant \delta' \quad (j=1, 2, \cdots, n),\ |t-c| \leqslant \sigma'$$

內，将(19.3)的 L_k 換为 L'_k 后所得到的不等式仍被满足。这就是說可以取 $\alpha=\alpha_0-\varepsilon_0$。因此，将区間 $\alpha_0 < x < \alpha_1$ 取得尽可能大时，α_0 就只能是解 $y_j=\varphi_j(x, c)$ $(j=1, 2, \cdots, n)$ 的定义域的左端。

同样 α_1 是解 $y_j=\varphi_j(x, c)$ $(j=1, 2, \cdots, n)$ 的定义域的右端。

現在設 E 为 $\varphi_j(x, t)$ $(j=1, 2, \cdots, n)$ 定义的范圍，如果 (ξ, c) 属于 E，則 x 的函数 $\varphi_j(x, c)$ 的定义域含有 a，ξ。从而含于这一

[1] 对于(19.4)中 $\alpha \leqslant x \leqslant \alpha'$ 只要求它含于解的存在区間內，因而 α 是任意的，故可选取使得 $\alpha_0 < \alpha \leqslant \alpha_0+\varepsilon$ 成立。当然在那里也要求它含有 a，但这一点与此处所論无关。——譯者注

定义域的有界閉区間 $\alpha \leqslant x \leqslant \alpha'$ 就含 a, ξ 于其内了。所以，由証明所得結果，取正数 δ, σ, 使得 $\varphi_j(x, t)$ 确乎是由(19.4)所定义。从而 (ξ, c) 是 E 的内点[1]。但是当 $t \to c$ 时，在 $\alpha \leqslant x \leqslant \alpha'$ 上一致地 $\varphi_j(x, t) \to \varphi_j(x, c)$，所以 $\varphi_j(x, t)$ 于 (ξ, c) 連續[2]。因为 (ξ, c) 是属于 E 的任一点，所以 E 是开集合，且 $\varphi_j(x, t)$ 連續于 E。

为簡单起見，設参数只是一个，当参数有任意多个时也有同样結果，因此得到下一定理：

定理 7 設含有参数 $t_1, \cdots, t_m$ 的微分方程

$$\frac{dy_j}{dx} = f_j(x, y_1, \cdots, y_n, t_1, \cdots, t_m) \quad (j=1, 2, \cdots, n) \quad (19.12)$$

的右端定义于 $(m+n+1)$ 維空間内的开集合 D，且于此連續，更設 Lipschitz 条件于 D 内对于 $t_1, \cdots, t_m$ 一致地成立。若 $(a, b_1, \cdots, b_n, c_1, \cdots, c_m)$ 属于 D，則满足条件：当 $x=a$ 时，$y_1=b_1, \cdots, y_n=b_n$ 的(19.12)的解定义于 $(m+1)$ 維空間内的一个开集合，且于此連續。

习題 如果(19.12)的右端关于 $y_1, \cdots, y_n$ 的偏导数在 D 内存在，并且当作 $x, y_1, \cdots, y_n, t_1, \cdots, t_m$ 的函数时也是連續的，則 Lipschitz 条件于 D 内对于 $t_1, \cdots, t_m$ 一致地成立。

§20 解的关于参数的可微性

現在我們来研究在前节所考慮的(19.1)的解 $y_j=\varphi_j(x, t)$ $(j=1, 2, \cdots, n)$ 关于 t 的可微性。将解代入(19.1)后，(19.1)化为恒等式，关于 t 微分此恒等式就可以知道

$$z_j = \frac{\partial}{\partial t}\varphi_j(x, t) \quad (j=1, 2, \cdots, n)$$

---

[1] 注意到 $\varphi_j(x, t)$ 定义于 $\alpha \leqslant x \leqslant \alpha'$，当 $|t-c| \leqslant \sigma$ 之后，即可知 $\alpha \leqslant x \leqslant \alpha'$ 及 $|t-c| \leqslant \sigma$ 所构成之閉矩形 $\subseteq E$，而 (ξ, c) 居其中，故为 E 之内点。——譯者注

[2] 由于 $|\varphi_j(x, t)-\varphi_j(\xi, c)| \leqslant |\varphi_j(x, t)-\varphi_j(x, c)| + |\varphi_j(x, c)-\varphi_j(\xi, c)|$ 再借助于 $\varphi_j(x, t)$ 一致地 $\to \varphi_j(x, c)$，且 $\varphi_j(x, c)$ 关于 x 連續，故得。——譯者注

满足綫性微分方程❶

$$\frac{dz_j}{dx}=\sum_{k=1}^{n} g_{jk}(x,\ t)z_k+g_j(x,\ t)\quad (j=1,\ 2,\ \cdots,\ n).\quad (20.1)$$

此处 $g_{jk}(x,\ t)$, $g_j(x,\ t)$ 分别表示在

$$\frac{\partial}{\partial y_k}f_j(x,\ y_1,\ \cdots,\ y_n,\ t),\quad \frac{\partial}{\partial t}f_j(x,\ y_1,\ \cdots,\ y_n,\ t)\quad (20.2)$$

內作置换 $y_1=\varphi_1(x,\ t)$, $\cdots$, $y_n=\varphi_n(x,\ t)$ 后所得到的 x, t 的函数。如果偏导数(20.2)在 $f_j(x,\ y_1,\ \cdots,\ y_n,\ t)$ 的定义域 D——D 是开集合——內連續，則 Lipschitz 条件于 D 內对于 t 一致地成立❷，因此 $\varphi_j(x,\ t)$ 于其定义域 E——E 也是开集合——連續❸。而綫性微分方程的解，在系数是連續的这一条件下，是存在的。因此設 $z_j=\psi_j(x,\ t)$ $(j=1,\ 2,\ \cdots,\ n)$ 是满足条件：当 $x=a$ 时，$z_1=0$, $\cdots$, $z_n=0$ 的(20.1)的解，則 $\psi_j(x,\ t)$ 于 E 內存在而且連續❹。于是要証明的就是

$$\frac{\partial}{\partial t}\ \varphi_j(x,\ t)=\psi_j(x,\ t).\quad (20.3)$$

例如，要想証明在 $t=c$ 处(20.3)成立，只要对于

$$u_j=\varphi_j(x,\ t)-\varphi_j(x,\ c)-(t-c)\psi_j(x,\ c)\quad (20.4)$$

証明当 $t\to c$ 时有

$$\lim\frac{u_j}{t-c}=0\quad (20.5)$$

成立即可。

---

❶ 当然，这是在承认 $\frac{\partial\varphi_j(x,\ t)}{\partial t}$ 存在之下而考虑的；其用意在于引出 (20.1) 以及(20.3)。——譯者注

❷ 見上节习題。——譯者注

❸ 依上节定理 7。——譯者注

❹ 因依假設，(20.2)在 D 連續，又由定理 7 已知 $\varphi_j(x,\ t)$ 連續于 E，故 (20.1) 的右端各項系数于 E 連續，再依定理 5 可知 $\psi_j(x,\ t)$ 定义于其上；将定理 7 特别地施于(20.1)上，可知 $\psi_j(x,\ t)$ 連續于 E。——譯者注

把

$$\Phi_j(x)=\varphi_j(x, c)+(t-c)\psi_j(x, c) \quad (j=1, 2, \cdots, n)$$

看作 $y_j=\varphi_j(x, t)$ $(j=1, 2, \cdots, n)$ 的近似解，我們来估計它的誤差。

設区間 $\alpha\leqslant x\leqslant\alpha'$ 是含于 $\varphi_j(x, c)$ 的定义域的有界閉区間，对于这一区間如果把正数 δ 取得充分小，(19.4) 就被包含在 D 内。因为 $\psi_j(x, t)$ 在 E 内是連續的，故当 σ 充分小时在 $\alpha\leqslant x\leqslant\alpha'$；$|t-c|\leqslant\sigma$ 内有下式成立❶：

$$|(t-c)\psi_j(x, t)|\leqslant\delta \quad (j=1, 2, \cdots, n).$$

在等式

$$\begin{aligned} f_j(x, &\Phi_1(x), \cdots, \Phi_n(x), t)-\Phi_j'(x) \\ &=f_j(x, \varphi_1(x, c)+(t-c)\psi_1(x, c), \cdots, \varphi_n(x, c) \\ &\qquad+(t-c)\psi_n(x, c), t) \\ &\quad-f_j(x, \varphi_1(x, c), \cdots, \varphi_n(x, c), c) \\ &\quad-(t-c)\left\{\sum_{k=1}^{n} g_{jk}(x, c)\psi_k(x, c)+g_j(x, c)\right\} \end{aligned}$$

中，将等号右端第一項看作 t 的函数而記以 $F(t)$，根据一个众所周知的公式，应有

$$F(t)=F(c)+(t-c)F'(c+\theta(t-c)) \quad (0<\theta<1).$$

显然

$$F(c)=f_j(x, \varphi_1(x, c), \cdots, \varphi_n(x, c), c).$$

如果把 $f_j(x, y_1, \cdots, y_n, t)$ 关于 y_k 的偏导数記为 $h_{jk}(x, y_1, \cdots, y_n, t)$，关于 t 的偏导数記为 $h_j(x, y_1, \cdots, y_n, t)$，再把 $\varphi_k(x, c)$，$\psi_k(x, c)$ 简写为 φ_k，ψ_k，于是有

---

❶ 先取 σ' 使閉矩形 $\alpha\leqslant x\leqslant\alpha'$，$|t-c|\leqslant\sigma'$ 含于 E 内，令 $\psi_j(x, t)$ 于此閉矩形所取最大値为 M，然后取 $\sigma=\min\left\{\sigma', \frac{\delta}{M}\right\}$ 即可。这样做，为了使得 $\Phi_j(x)$ 受到(19.4)的約束，以保証以下复合函数 $f_j(x, \Phi_1(x), \cdots, \Phi_n(x), t)$ 的建立。——譯者注

$$F'(c+\theta(t-c))$$

$$=\sum_{k=1}^{n}\psi_k h_{jk}(x,\ \varphi_1+\theta(t-c)\psi_1,\ \cdots,\ \varphi_n+\theta(t-c)\psi_n,\ c+\theta(t-c))$$

$$+h_j(x,\ \varphi_1+\theta(t-c)\varphi_1,\ \cdots,\ \varphi_n+\theta(t-c)\psi_n,\ c+\theta(t-c)),$$

从而得到

$$f_j(x,\ \Phi_1(x),\ \cdots,\ \Phi_n(x),\ t)-\Phi_j'(x)$$

$$=(t-c)\Big[\sum_{k=1}^{n}\{h_{jk}(x,\varphi_1+\theta(t-c)\psi_1,\cdots,\varphi_n+\theta(t-c)\psi_n,c+\theta(t-c))$$

$$-g_{jk}(x,c)\}\psi_k+\{h_j(x,\ \varphi_1+\theta(t-c)\psi_1,\ \cdots,$$

$$\varphi_n+\theta(t-c)\psi_n,\ c+\theta(t-c))-g_j(x,\ c)\}\Big].$$

因为

$$g_{jk}(x,\ c)=h_{jk}(x,\ \varphi_1,\ \cdots,\ \varphi_n,\ c),$$

$$g_j(x,\ c)=h_j(x,\ \varphi_1,\ \cdots,\ \varphi_n,\ c),$$

根据 h_{jk}, h_j 的連續性，对于任意正数 ε，只要 $t-c$ 充分小，那么 [　] 中的值的絕对值就比 ε 小，所以 $y_j=\Phi_j(x)$ $(j=1,\ 2,\ \cdots,\ n)$ 滿足微分不等式

$$\left|\frac{dy_j}{dx}-f_j(x,\ y_1,\ \cdots,\ y_n,\ t)\right|\leqslant\varepsilon|t-c|\quad(j=1,\ 2,\ \cdots,\ n).$$

而且，在(19.4)中，設

$$|h_{jk}(x,\ y_1,\ \cdots,\ y_n,\ t)|\leqslant L_k\quad(j=1,\ 2,\ \cdots,\ n),$$

則 Lipschitz 条件 (19.3) 即被滿足。从而可应用定理 3，并得到

$$|\varphi_j(x,\ t)-\varphi_j(x,\ c)-(t-c)\psi_j(x,c)|\leqslant\frac{\varepsilon|t-c|}{L}(e^{L|x-a|}-1).$$

当 t 趋近于 c 时，ε 可小到任意程度，于是(20.5)便得到証明。

即使微分方程含有 t 以外的参数，上述証明仍得成立，所以有下述定理：

定理 8　含有参数 $t_1,\ \cdots,\ t_m$ 的微分方程(19.12)的右端定义于 $(m+n+1)$ 維空間里的开集合 D，并且在 D 内它的关于 $y_1,\ \cdots,$

y_n, t_1 的偏导数都是連續的。如果$(a, b_1, \cdots, b_n, c_1, \cdots, c_m)$ 属于 D，則滿足条件：当 $x=a$ 时，$y_1=b_1, \cdots, y_n=b_n$ 的 (19.12) 的解 $y_j=\varphi_j(x, t_1, \cdots, t_m)$ $(j=1, 2, \cdots, n)$ 定义在$(m+1)$維空間里的开集合內，且在此开集合內关于 t_1 是可微的。

又，在 $f_j(x, y_1, \cdots, y_n, t_1, \cdots, t_m)$关于 y_k, t_1 的偏导数內以 $\varphi_1(x, t_1, \cdots, t_m), \cdots, \varphi_n(x, t_1, \cdots, t_m)$ 替換 $y_1, \cdots, y_n$，并将所得到的 $x, t_1, \cdots, t_m$ 的函数表以 $g_{jk}(x, t_1, \cdots, t_m)$, $g_j(x, t_1, \cdots, t_m)$，且設綫性微分方程

$$\frac{dz_j}{dx}=\sum_{k=1}^{n} g_{jk}(x,t_1,\cdots,t_m)z_k+g_j(x,t_1,\cdots,t_m) \quad (j=1, 2, \cdots, n) \tag{20.6}$$

的滿足条件：当 $x=a$ 时，$z_1=\cdots=z_n=0$ 的解为 $z_j=\psi_j(x, t_1, \cdots, t_m)$ $(j=1, 2, \cdots, n)$，則

$$\frac{\partial}{\partial t_1}\varphi_j(x, t_1, \cdots, t_m)=\psi_j(x, t_1, \cdots, t_m) \tag{20.7}$$

成立。

(20.6)叫做(19.12)关于参数 t_1 的**变分方程**。

注意 如果(19.12)的右端有关于 $y_1, \cdots, y_n, t_1, \cdots, t_m$ 的直到 p 次的連續偏导数，則它的解 $y_j=\varphi_j(x, t_1, \cdots, t_m)$ 有关于 $t_1, \cdots, t_m$ 的直到 p 次的連續偏导数。

可对 p 使用归納法証明这一事实。当 $p=1$ 时所給命題即定理 8。今設在 $p-1$ 的情况下命題的論断是正确的。从而 $\varphi_j(x, t_1, \cdots, t_m)$的关于 $t_1, \cdots, t_m$ 直到 $(p-1)$ 次的偏导数存在而且連續。此时 $g_{jk}(x, t_1, \cdots, t_m)$, $g_j(x, t_1, \cdots, t_m)$的关于 $t_1, \cdots, t_m$ 直到$(p-1)$次的偏导数也存在且連續，因此作为滿足条件：当 $x=a$ 时，$z_1=\cdots=z_n=0$ 的解而定义的 $z_j=\psi_j(x, t_1, \cdots, t_m)$ $(j=1, 2, \cdots, n)$也有关于 $t_1, \cdots, t_m$ 直到$(p-1)$次的連續偏导数。所以，由 (20.7) 可知 $\frac{\partial}{\partial t_1}\varphi_j$ 有关于 $t_1, \cdots, t_m$ 直到 $(p-1)$ 次的連續偏导数。对于 $\frac{\partial}{\partial t_k}\varphi_j$ 也有同样的結論。于是 φ_j 有关于 $t_1, \cdots, t_m$ 直到 p 次的連續偏导数这一論断已得到証明。

§21 Cauchy 存在定理(复变数)

至今为止所考虑的都是实变数的情形，現在考虑复变数的情形。

定理9 如果(15.2)的右端在

$$|x-a|<r,\ |y_1-b_1|<\rho,\ \cdots,\ |y_n-b_n|<\rho \tag{21.1}$$

内是解析的，而且它的絕对值不大过 M，則(15.2)有而且只有一个解析的解，滿足条件：当 $x=a$ 时 $y_1=b_1$, $\cdots$, $y_n=b_n$，这个解至少在

$$|x-a|<r(1-e^{-\rho/(n+1)rM}) \tag{21.2}$$

内是解析的。

为了不使式子变得很复杂，只就 $n=2$ 的情形进行証明。因之考虑微分方程(15.7)。設 x, y, z 的初值为0，如此則可取 $x-a$, $y-b$, $z-c$ 为变数。从而設(15.7)的右端在

$$|x|<r,\quad |y|<\rho,\quad |z|<\rho \tag{21.3}$$

内是解析的，而且它的絕对值不大过 M。将 $f(x,y,z)$，$g(x,y,z)$ 展开为

$$\left.\begin{aligned} f(x,\ y,\ z)=\sum a_{jkl}x^jy^kz^l,\\ g(x,\ y,\ z)=\sum b_{jkl}x^jy^kz^l.\end{aligned}\right\} \tag{21.4}$$

由函数論的知識可知，不等式

$$|a_{jkl}|,\ |b_{jkl}|\leqq M/r^j\rho^{k+l} \text{❶} \tag{21.5}$$

成立。

今設滿足条件：$x=0$ 时 $y=z=0$ 的解存在而且是解析的，并

❶ (21.4)是根据多复变函数論上的 Taylor 公式而得到的，式中

$$a_{jkl}=\frac{\partial^{j+k+l}f}{\partial x^j\partial y^k\partial z^l}\cdot\frac{1}{j!\,k!\,l!},$$

而 $a_{000}=f(0,0,0)$；(21.5)是根据 Taylor 展开式系数估值公式而得到的。——譯者注

設它是 $y=\varphi(x)$, $z=\psi(x)$, 于是就得到展开式

$$\varphi(x)=\sum_{m=1}^{\infty}p_m x^m, \quad \psi(x)=\sum_{m=1}^{\infty}q_m x^m. \tag{21.6}$$

将它代入(15.7)就得到一个恒等式,以 x 的升冪排列等号两端各項,并比較同次冪的系数就得到

$$\left.\begin{aligned}(m+1)p_{m+1}&=\sum_{j+k+l\leqslant m}a_{jkl}H_{jklm}(p_1,\cdots,p_m,q_1,\cdots,q_m),\\(m+1)q_{m+1}&=\sum_{j+k+l\leqslant m}b_{jkl}H_{jklm}(p_1,\cdots,p_m,q_1,\cdots,q_m).\end{aligned}\right\} \tag{21.7}$$

此处 $H_{jklm}(p_1,\cdots,p_m,q_1,\cdots,q_m)$ 是对于 $p_1,\cdots,p_m,q_1,\cdots,q_m$ 施行加法与乘法而得到的多項式,它的系数是正整数。特別是

$$p_1=a_{000}, \quad q_1=b_{000}. \tag{21.8}$$

如果决定了 $p_1,\cdots,p_m,q_1,\cdots,q_m$ 之値,則由(21.7)就可以唯一决定 p_{m+1}, q_{m+1} 之値,从而展开式(21.6)的系数也就被唯一决定了。由此可知,如果存在解析的解,則这样的解一定是唯一的。問題就在于証明它的存在了。

先由(21.8)定义 p_1, q_1, 然后由(21.7)依次决定 $p_1,p_2,\cdots$, $q_1,q_2,\cdots$之値。此时假定两个冪級数(21.6)都有大于零的收斂半徑,則当选定适当的正数 r' 之后,置 $|x|<r'$, 就有 $|\varphi(x)|<\rho$, $|\psi(x)|<\rho$. 以 $y=\varphi(x)$, $z=\psi(x)$代入(15.7),則所得等式的两端在 $|x|<r'$ 内是解析的,并且可展成 x 的冪級数,此时由(21.7),(21.8)可知两端展开式的系数分别对应相等。从而 $y=\varphi(x)$, $z=\psi(x)$就是满足所要条件的解,并且在 $|x|<r'$ 内是解析的。所以問題就归結到証明冪級数(21.6)有大于零的收斂半徑,自然冪級数的系数 p_m, q_m $(m=1,2,\cdots)$ 是由(21.7),(21.8)所决定的。我們用优級数来进行証明。

一般,当 $|a_{jkl}|\leqslant A_{jkl}$ 时,对于以 a_{jkl} 为系数的冪級数来說,以 A_{jkl} 为系数的冪級数叫做**优級数**,当

$$f(x,y,z)=\sum a_{jkl}x^j y^k z^l,$$

$$F(x, y, z)=\sum A_{jkl}x^jy^kz^l$$

时，我們把后者作为前者的优級数的这件事表述为：

$$f(x, y, z)\ll F(x, y, z) \text{ 或 } F(x, y, z)\gg f(x, y, z).$$

今以具有下述关系

$$f(x, y, z)\ll F(x, y, z), \quad g(x, y, z)\ll G(x, y, z) \quad (21.9)$$

的冪級数

$$F(x, y, z)=\sum A_{jkl}x^jy^kz^l, \quad G(x, y, z)=\sum B_{jkl}x^jy^kz^l \quad (21.10)$$

为微分方程

$$y'=F(x, y, z), \quad z'=G(x, y, z) \quad (21.11)$$

的右端，并对此进行討論。設这两个方程当滿足条件 $x=0$ 时 $y=z=0$，分别有解析的解 $y=\Phi(x)$，$z=\Psi(x)$，并設把它們展开成 x 的冪級数，就得到

$$\Phi(x)=\sum_{m=1}^{\infty}P_mx^m, \quad \Psi(x)=\sum_{m=1}^{\infty}Q_mx^m. \quad (21.12)$$

决定它們的系数 P_m，Q_m 的計算与决定展开式 (21.6) 的系数 p_m，q_m 的計算是相同的，所以有

$$\left.\begin{aligned}(m+1)P_{m+1}&=\sum_{j+k+l\leq m}A_{jkl}H_{jklm}(P_1, \cdots, P_m, Q_1, \cdots, Q_m),\\(m+1)Q_{m+1}&=\sum_{j+k+l\leq m}B_{jkl}H_{jklm}(P_1, \cdots, P_m, Q_1, \cdots, Q_m).\end{aligned}\right\} \quad (21.13)$$

特别对于 $m=0$ 有

$$P_1=A_{000}, \quad Q_1=B_{000}. \quad (21.14)$$

H_{jklm} 的意义仍与在(21.7)内的意义相同。

由 (21.8) 与 (21.14) 得到 $|p_1|\leqslant P_1$，$|q_1|\leqslant Q_1$，一般地，設 $|p_1|\leqslant P_1, \cdots, |p_m|\leqslant P_m$，$|q_1|\leqslant Q_1, \cdots, |q_m|\leqslant Q_m$，又多項式 H_{jklm} 的系数都是正的，由(21.7)与(21.13)就得到 $|p_{m+1}|\leqslant P_{m+1}$，$|q_{m+1}|\leqslant Q_{m+1}$。所以对于所有自然数 m，$|p_m|\leqslant P_m$，$|q_m|\leqslant Q_m$ 成立。这就是說我們已經得到

$$\varphi(x)\ll\Phi(x),\quad \psi(x)\ll\Psi(x).$$

所以 $\varphi(x)$, $\psi(x)$ 的收斂半徑不比 $\Phi(x)$, $\Psi(x)$ 的收斂半徑小[1]。因之 (21.11) 有满足条件: $x=0$ 时 $y=z=0$ 的解析的解就在于决定满足(21.9)的 $F(x, y, z)$, $G(x, y, z)$这一問題上了。

根据不等式(21.5), 因而,以(21.5)的右端为系数作冪級数

$$\frac{M}{\left(1-\frac{x}{r}\right)\left(1-\frac{y}{\rho}\right)\left(1-\frac{z}{\rho}\right)}=\sum M\left(\frac{x}{r}\right)^{i}\left(\frac{y}{\rho}\right)^{k}\left(\frac{z}{\rho}\right)^{l}$$

后,即可取此級数为 $F(x, y, z)$, $G(x, y, z)$. 此时(21.11)就是

$$\frac{dy}{dx}=\frac{dz}{dx}=\frac{M}{\left(1-\frac{x}{r}\right)\left(1-\frac{y}{\rho}\right)\left(1-\frac{z}{\rho}\right)}. \tag{21.15}$$

若使 $y=z$, 就得到可分离变数型的微分方程

$$\frac{dy}{dx}=\frac{M}{\left(1-\frac{x}{r}\right)\left(1-\frac{y}{\rho}\right)^{2}}.$$

求上式满足条件: $x=0$ 时 $y=0$ 的一个解就得到

$$y=\rho\left\{1-\sqrt[3]{1+\frac{3Mr}{\rho}\log\left(1-\frac{x}{r}\right)}\right\}.$$

所以, 命

$$\Phi(x)=\Psi(x)=\rho\left\{1-\sqrt[3]{1+\frac{3Mr}{\rho}\log\left(1-\frac{x}{r}\right)}\right\},$$

则 $y=\Phi(x)$, $z=\Psi(x)$就是(21.15)的解, 并且满足条件: 当 $x=0$ 时 $y=0$, $z=0$.

$\Phi(x)$, $\Psi(x)$在 $x=0$ 确实是解析的,所以它的展开式 (21.12) 有不等于零的收斂半徑;为了求此收斂半徑,可以求最靠近零的奇点。为了求有限距离的奇点,可求满足方程

---

[1] 因依定义 $\varphi(x)$之收斂半徑$=\dfrac{1}{\overline{\lim}\sqrt[m]{|p_m|}}$,

$\Phi(x)$之收斂半徑$=\dfrac{1}{\overline{\lim}\sqrt[m]{|P_m|}}$. ——譯者注

$$1-\frac{x}{r}=0,\quad 1+\frac{3Mr}{\rho}\log\left(1-\frac{x}{r}\right)=0$$

的 x 的值。由前一方程得 $x=r$，由后一方程得

$$x=r(1-e^{-\rho/3Mr}).$$

以 r' 表这一值，則 $r'<r$，在 $|x|<r'$ 內

$$|\Phi(x)|=|\Psi(x)|<\Phi(r')=\rho\text{❶},$$

所以，在 $|x|<r'$ 內 $\Phi(x)$，$\Psi(x)$ 是解析的，而且它們的絕对值比 ρ 小。从而 $\varphi(x)$，$\psi(x)$ 在 $|x|<r'$ 內也是解析的，而且絕对值也比 ρ 小❶。因之 $y=\varphi(x)$，$z=\psi(x)$ 确实是在 $|x|<r'$ 內解析的解。

§22 解的拓展(复变数)

根据定理9的假定❷。如果有

$$|\alpha-a|<\frac{r}{2},\quad |\beta_1-b_1|<\frac{\rho}{2},\ \cdots,\ |\beta_n-b_n|<\frac{\rho}{2},\quad (22.1)$$

則区域

$$|x-\alpha|<\frac{r}{2},\quad |y_1-\beta_1|<\frac{\rho}{2},\ \cdots,\ |y_n-\beta_n|<\frac{\rho}{2}\quad (22.2)$$

含于(21.1)內，因之(15.2)的右端在(22.2)內是解析的，而且它的絕对值不大过 M. 从而滿足条件：当 $x=\alpha$ 时，$y_1=\beta_1$，$\cdots$，$y_n=\beta_n$ 的(15.2)的解析的解是存在的，且在

$$|x-\alpha|<\frac{1}{2}r(1-e^{-\rho/(n+1)rM})\qquad (22.3)$$

內是解析的。只由这一事实即可导出下述定理。

定理 10 設(15.2)的右端在 $(a, b_1, \cdots, b_n)$ 是解析的。C 表示以 a 为一个端点的曲綫，設 $y_j=\varphi_j(x)$ $(j=1,2,\cdots,n)$ 为(15.2)

---

❶ 因当 $|x|<r'$ 时，$|\Phi(x)|\leqslant\Phi(|x|)<\Phi(r')=\rho$，$|\varphi(x)|\leqslant\sum p_m|x|^m\leqslant\sum P_m|x|^m=\Phi(|x|)<\Phi(r')=\rho$.——譯者注

❷ 所謂定理9的假定，卽指(15.2)右端在(21.1)解析，且其絕对值 $\leqslant M$.——譯者注

的解，它在 C 上除 a 以外都是解析的。若在 C 上适当选取收斂于 a 的点列 $\{\alpha_k\}$，使得 $\varphi_j(\alpha_k)\to b_j$ 成立，則这一解在 $x=a$ 是解析的。

如果正数 r, ρ 取得充分小，定理 9 的假定即可得到滿足❶。如果 k 取得充分大，且命 $\alpha=\alpha_k$, $\beta_j=\varphi_j(\alpha_k)$，則 (22.1) 就得到滿足❷，因而 $\varphi_j(x)$ 在 (22.3) 內是解析的。当 k 充分大时，C 上以 a, α_k 为端点的弧就含于(22.3)內，因而 $\varphi_j(x)$ 确实在 $x=a$ 是解析的。

今設 $\varphi_j(x)$ 在区域 D 內是解析的，且在它的子域 Δ 內 $y_j=\varphi_j(x)$ $(j=1, 2, \cdots, n)$ 滿足 (15.2)，如果当 $\xi\in D$ 时 (15.2) 的右端在 $(\xi, \varphi_1(\xi), \cdots, \varphi_n(\xi))$ 是解析的，則在 Δ 內，

$$\varphi_j'(x)=f_j(x, \varphi_1(x), \cdots, \varphi_n(x))$$

成立，并且它的两端在 D 內是解析的❸。所以，由关于解析函数唯一性定理，它的两端在 D 也是一致的，这就是說 $y_j=\varphi_j(x)$ $(j=1, 2, \cdots, n)$ 在 D 內也是(15.2)的解。这一事实写为下述定理：

定理 11　当(15.2)的右端是解析的时候，則(15.2)的解的解析拓展是方程的解。

今設 $y_j=\varphi_j(x)$ $(j=1, 2, \cdots, n)$ 在曲綫 C 上是解析的，并且是(15.2)的解，再設曲綫 C 的方程是 $x=\chi(t)$ $(t_0\leqslant t\leqslant t_1)$。为了易于考慮，設 $\chi(t)$ 有連續导数 $\chi'(t)$。命

$$\Phi_j(t)=\varphi_j(\chi(t)) \quad (j=1, 2, \cdots, n). \tag{22.4}$$

显然，$y_j=\Phi_j(t)$ $(j=1, 2, \cdots, n)$ 就是

---

❶ (15.2)右端在点 $(a, b_1, \cdots, b_n)$ 解析，即是在以此点为中心的某个鄰域內解析，所以使定理 9 假定成立的 r, ρ 是存在的。——譯者注

❷ 这是由于 $\alpha_k\to a$, $\varphi_j(\alpha_k)\to b_j$ $(j=1, 2, \cdots, n)$ 的緣故。——譯者注

❸ $f_j(x, \varphi_1(x), \cdots, \varphi_n(x))$ 解析于 D，这是由假設而知道的；至于 $\varphi_j'(x)$ 解析于 D 是由于解析函数的导函数还是解析的緣故。——譯者注

$$\frac{dy_j}{dt}=\chi'(t)f_j(\chi(t),\ y_1,\ \cdots,\ y_n)\quad (j=1,\ 2,\ \cdots,\ n)\quad(22.5)$$

的解。

反之，当 $t_0\leqslant t\leqslant t_1$ 时，設 (15.2) 的右端在 $(\chi(t),\ \Phi_1(t),\ \cdots,\ \Phi_n(t))$ 是解析的，并且 $y_j=\Phi_j(t)$ $(j=1,\ 2,\ \cdots,\ n)$ 满足(22.5)。命 $a=\chi(t_0)$，$b_j=\Phi_j(t)$ $(j=1,\ 2,\ \cdots,\ n)$，由假定 (15.2) 的右端在 $(a,\ b_1,\ \cdots,\ b_n)$ 是解析的，因而只存在一个解析的解，它满足条件：当 $x=a$ 时，$y_1=b_1,\ \cdots,\ y_n=b_n$❶．命这一解为 $y_j=\varphi_j(x)$ $(j=1,\ 2,\ \cdots,\ n)$．从而 $y_j=\varphi_j(\chi(t))$ $(j=1,\ 2,\ \cdots,\ n)$ 就是满足条件：当 $t=t_0$ 时，$y_1=b_1,\ \cdots,\ y_n=b_n$ 的(22.5)的解。由于(22.5)的右端在 $(t_0,\ b_1,\ \cdots,\ b_n)$ 关于 $y_1,\ \cdots,\ y_n$ 是解析的，所以 Lipschitz 条件被满足❷，从而满足：当 $t=t_0$ 时，$y_1=b_1,\ \cdots,\ y_n=b_n$ 的解是唯一的。因之(22.4)至少在 $t-t_0(>0)$ 充分小的时候成立。

现在設 $\varphi_j(x)$ 沿曲綫 C 向 $\chi(\tau)$ $(t_0<\tau\leqslant t_1)$ 趋近而能够解析拓展，且(22.4)成立。依定理 11，$y_j=\varphi_j(x)$ $(j=1,\ 2,\ \cdots,\ n)$ 沿 C 而满足 (15.2)❸。由 (22.4)，x 沿着連結 $a,\ \chi(\tau)$ 的曲綫 C 的弧而趋近于 $\chi(\tau)$ 时，$\varphi_j(x)\to\Phi_j(\tau)$❹．而且(15.2) 的右端在 $(\chi(\tau),\ \Phi_1(\tau),\ \cdots,\ \Phi_n(\tau))$ 是解析的，因而由定理 10 可知，$\varphi_j(x)$ 在 $\chi(\tau)$ 也是解析的，从而若 $\tau<t_1$，(22.4) 在 $t-\tau(\geqslant 0)$ 充分小的时候成立。所以若将(22.4)成立的区間 $t_0\leqslant t\leqslant\tau$ 取得尽可能大时，必有 $\tau=t_1$。于此得下述定理。

---

❶ (15.2) 的右端可在此点的某个邻域解析，从而連續，再取适当的 $r,\ \rho$，使 $|x-a|\leqslant r$，$|y_j-b_j|\leqslant\rho$ $(j=1,\ 2,\ \cdots,\ n)$ 含于此邻域内，于是 (15.2) 右端的絕对值 $\leqslant$ 一固定数 M．然后再在(21.1)內考慮而引用定理 9 卽得。——譯者注

❷ 注意到解析函数的偏导数存在且連續的这一事实。——譯者注

❸ 此时并非在整个 C 上，而是在 C 上由 a 开始到 $\chi(\tau)$ 前的这一弧段上考虑的。——譯者注

❹ 因 $\Phi_j(t)$ 連續，故当 $t\to\tau$ 时 $\Phi_j(t)\to\Phi_j(\tau)$，而依假設可利用(22.4)，$\Phi_j(t)=\varphi_j(\chi(t))\to\varphi_j(x)$，卽 $x\to\chi(\tau)$，則 $\varphi_j(x)\to\Phi_j(\tau)$．——譯者注

定理 12 設 C 是由 $x=\chi(t)$ $(t_0\leqslant t\leqslant t_1)$ 所表示的曲綫。如果 $y_j=\varphi_j(x)$ $(j=1, 2, \cdots, n)$ 在曲綫 C 上是解析的并且是(15.2)的解，则 $y_j=\varphi_j(\chi(t))$ $(j=1, 2, \cdots, n)$ 在 $t_0\leqslant t\leqslant t_1$ 上是(22.5)的解。

反之，如果 $y_j=\Phi_j(t)$ $(j=1, 2, \cdots, n)$ 在 $t_0\leqslant t\leqslant t_1$ 上是(22.5)的解，并且对于属于区間 $t_0\leqslant t\leqslant t_1$ 的任一值 τ，(15.2)的右端在 $(\chi(\tau), \Phi_1(\tau), \cdots, \Phi_n(\tau))$ 是解析的，则满足条件：当 $x=\chi(t_0)$ 时，$y_1=\Phi_1(t_0), \cdots, y_n=\Phi_n(t_0)$ 的(15.2)的解析的解 $y_j=\varphi_j(x)$ $(j=1, 2, \cdots, n)$ 沿曲綫 C 得以解析拓展，并且(22.4)成立。

特别在綫性微分方程

$$\frac{dy_j}{dx}=\sum_{k=1}^{n}a_{jk}(x)y_k+b_j(x) \quad (j=1, 2, \cdots, n) \qquad (22.6)$$

的情形下，(22.5)也仍是一个綫性微分方程

$$\frac{dy_j}{dt}=\chi'(t)\left\{\sum_{k=1}^{n}a_{jk}(\chi(t))y_k+b_j(\chi(t))\right\} \quad (j=1, 2, \cdots, n). \qquad (22.7)$$

如果 $a_{jk}(x)$ 沿曲綫 C 是解析的[1]，则(22.7)的系数在 $t_0\leqslant t\leqslant t_1$ 上是連續函数。在实变数的綫性微分方程的情况下[2]，已經知道解存在于系数連續的区間内。从而由定理 12 可知，(22.6)的解在曲綫 C 上是解析的[3]。这就是說，(22.6)的解在遇不到 $a_{jk}(x)$，$b_j(x)$ 的奇点时，就得以解析拓展。这一事实叙述为下面定理：

定理 13 綫性微分方程(22.6)的解的奇点就是 $a_{jk}(x)$，$b_j(x)$ 的某一个奇点。

---

[1] 当然同时也要假設：$b_j(\chi(t))$ 沿曲綫 C 解析。——譯者注

[2] 在(22.7)中的函数虽然取复数值，然而在 §15～§20 的結論中，自变数 x 为实数的这件事是本质的，至于函数取复数或实数值是无关紧要的。——原书注

[3] 在引用定理 12 时，首先要考慮：(22.6)在 $(\chi(t), \Phi_1(\tau), \cdots, \Phi_n(\tau))$ 解析，但由于(22.6)右端的构造，这是很显然的。——譯者注

§23 关于参数的解析性

应当注意到，在§15～§20的結果中，函数值不是实数而是复数时結論也是正确的。在定理8的情况下，不仅函数值可以取复数，就是参数 $t_1, \cdots, t_m$ 也取复数值时定理仍得成立。在此，命 $y_1, \cdots, y_n, t_1, \cdots, t_m$ 表复数，只命 x 表实数，因而所考虑的空間的(实的)維数是 $2m+2n+1$。所謂复变函数可微，就是解析的意思，因而定理8在向 $t_1, \cdots, t_m$ 是复数的情况下推广时，可以写成下面形式。

定理 14 設含有参数 $t_1, \cdots, t_m$ 的微分方程(19.12)的右端是定义于 $(2m+2n+1)$ 維空間的开集合 D 内的連續函数，并且关于 $y_1, \cdots, y_n, t_1, \cdots, t_m$ 是解析的。如果 $(a, b_1, \cdots, b_n, c_1, \cdots, c_m)$ 属于 D，则(19.12)的满足条件：当 $x=a$ 时，$y_1=b_1, \cdots, y_n=b_n$ 的解 $y_j=\varphi_j(x, t_1, \cdots, t_m)$ $(j=1, 2, \cdots, n)$ 定义于 $(2m+1)$ 維空間的开集合 E 内，而且作为 $x, t_1, \cdots, t_m$ 的函数是連續的，作为 $t_1, \cdots, t_m$ 的函数是解析的。

定理8的后半依其原来的形式就能成立，所以不再重叙。

以上是 x 为实变数的情况；x 也可以为复变数，这一情况以下就要考虑。

設(19.12)的右端是 $x, y_1, \cdots, y_n, t_1, \cdots, t_m$ 的函数，且在含有 $(a, b_1, \cdots, b_n, c_1, \cdots, c_m)$ 的区域 D 内是解析的，考虑其解析的解

$$y_j=\varphi_j(x, t_1, \cdots, t_m) \quad (j=1, 2, \cdots, n).$$

它們满足条件：当 $x=a$ 时，$y_1=b_1, \cdots, y_n=b_n$。設这組解当 $t_1=c_1, \cdots, t_m=c_m$ 时沿着以 a 为其一端的曲綫 C 得以解析拓展，而且在曲綫 C 的邻域满足(19.12)。

如以 $D(\tau_1, \cdots, \tau_m)$ 表示由属于 D 的 $(x, y_1, \cdots, y_n, \tau_1, \cdots,$

τ_m) 所得到的$(x, y_1, \cdots, y_n)$的集合，则它是$2(n+1)$維空間里的开集合❶，而且当$x\in C$, $t_1=c_1, \cdots, t_m=c_m$时$(x, \varphi_1, \cdots, \varphi_n)$含于$D(c_1, \cdots, c_m)$内❷。所以纵然$C$向两端稍稍延长，它也仍含于$D(c_1, \cdots, c_m)$内❸。設以$C'$表示此曲綫，以$x=\chi(s)$ $(s_0'\leqslant s\leqslant s_1')$表示其方程，则就能够假設与曲綫$C$相对应的区間$s_0\leqslant s\leqslant s_1$含于区間$s_0'<s<s_1'$了。設$y_j=\Phi_j(s, t_1, \cdots, t_m)$ $(j=1, 2, \cdots, n)$是方程

$$\frac{dy_j}{ds}=\chi'(s)f_j(\chi(s), y_1, \cdots, y_n, t_1, \cdots, t_m) \quad (j=1, 2, \cdots, n) \tag{23.1}$$

的解，并且滿足条件：当$s=s_0$时，$y_1=b_1, \cdots, y_n=b_n$。因为D是开集合，所以使得s滿足$s_0'<s<s_1'$而且$(\chi(s), y_1, \cdots, y_n, t_1, \cdots, t_m)$属于$D$的$(s, y_1, \cdots, y_n, t_1, \cdots, t_m)$的集合$D'$就是在$(2m+2n+1)$維空間里的开集合❹，把它看作(23.1)的定义域而应用定理14时，$\Phi_j(s, t_1, \cdots, t_m)$就定义于$(2m+1)$維空間的一个开集合$E$，并且作为$s, t_1, \cdots, t_m$的函数是連續的，同时关于$t_1, \cdots, t_m$是解

---

❶ 由于D开的緣故。——譯者注

❷ 为此只須証明对于每个$x\in C$, $(x, \varphi_1(x, c_1, \cdots, c_m), \cdots, \varphi_n(x, c_1, \cdots, c_m), c_1, \cdots, c_m)\in D$即可。由于假設

$$\frac{d\varphi_j}{dx}=f_j(x, \varphi_1(x, c_1, \cdots, c_m), \cdots, \varphi_n(x, c_1, \cdots, c_m), c_1, \cdots, c_m),$$

而f_j的定义域为D，故必

$(x, \varphi_1(x, c_1, \cdots, c_m), \cdots, \varphi_n(x, c_1, \cdots, c_m), c_1, \cdots, c_m)\in D$。——譯者注

❸ 注意$D(c_1, \cdots, c_m)$开，且$\varphi(x, c_1, \cdots, c_m)$于$(C)$之邻域滿足(19.12)，以及于$(C)$解析拓展的这一假設。——譯者注

❹ 因

$D'=\{(s, y_1, \cdots, y_n, t_1, \cdots, t_m) \mid (\chi(s), y_1, \cdots, y_n, t_1, \cdots, t_m)\in D, s_0'<s<s_1'\}$，故对于每个$(s', y_1', \cdots, y_n', t_1', \cdots, t_m')\in D'$, $(\chi(s'), y_1', \cdots, y_n', t_1', \cdots, t_m')\in D$，而$D$开，于是有$\delta>0$：由$|x-\chi(s')|<\delta$, $|y_1-y_1'|<\delta, \cdots, |y_n-y_n'|<\delta$, $|t_1-t_1'|<\delta, \cdots, |t_m-t_m'|<\delta$所构成之邻域$\subseteq D$。再依曲綫$C'$: $x=\chi(s)$的特性，有η：当$|s-s'|<\eta$时，$|x-\chi(s')|<\delta$。

于是由$|s-s'|<\eta$, $|y_j-y_j'|<\delta$ $(j=1, 2, \cdots, n)$, $|t_j-t_j'|<\delta$ $(j=1, 2, \cdots, m)$，所构成之邻域一方面含有此$(s', y_1', \cdots, y_n', t_1', \cdots, t_m')$，另一方面$\subseteq D'$。——譯者注

析的。而且它当 $t_1=c_1, \cdots, t_m=c_m$ 时存在于 $s_0\leqslant s\leqslant s_1$，即使得 $s_0\leqslant s\leqslant s_1$ 成立的 $(s, c_1, \cdots, c_m)$ 属于 E. 因为 E 是开集合，所以如果 $\delta>0$ 充分小，即使得

$$s_0\leqslant s\leqslant s_1,\ |t_1-c_1|<\delta,\ \cdots,\ |t_m-c_m|<\delta$$

成立的 $(s, t_1, \cdots, t_m)$ 就属于 E. 此时使

$$x=\chi(s),\ y_j=\Phi_j(s, t_1, \cdots, t_m)\quad (j=1, 2, \cdots, n)$$

成立的点 $(x, y_1, \cdots, y_n, t_1, \cdots, t_m)$ 属于 D❶，因而 (19.12) 的右端作为 $y_1, \cdots, y_n$ 的函数，当

$$s_0\leqslant s\leqslant s_1,\ |t_1-c_1|<\delta,\ \cdots,\ |t_m-c_m|<\delta$$

时，于

$$x=\chi(s),\ y_j=\Phi_j(s, t_1, \cdots, t_n)\quad (j=1, 2, \cdots, n)$$

解析。因之，由定理 12, $\varphi_j(x, t_1, \cdots, t_m)$ 沿曲綫 C 得以解析拓展，而且

$$\varphi_j(\chi(s), t_1, \cdots, t_m)=\Phi_j(s, t_1, \cdots, t_m)$$

成立。所以，当 x 在曲綫 C 上且 $|t_1-c_1|<\delta, \cdots, |t_m-c_m|<\delta$ 时，$\varphi_j(x, t_1, \cdots, t_m)$ 是 $x, t_1, \cdots, t_m$ 的解析函数。今将这一事实写成下一定理：

定理 15　設 (19.12) 的右端，在含有 $(a, b_1, \cdots, b_n, c_1, \cdots, c_m)$ 的区域 D 内，是复变数 $x, y_1, \cdots, y_n, t_1, \cdots, t_m$ 的解析函数。設 $y_j=\varphi_j(x, t_1, \cdots, t_m)$ $(j=1, 2, \cdots, n)$ 是 (19.12) 的解析的解，而且满足条件：当 $x=a$ 时，$y_1=b_1, \cdots, y_n=b_n$；并設 $y_j=\varphi_j(x, c_1, \cdots, c_m)$ $(j=1, 2, \cdots, n)$ 沿着以 a 为其一端的曲綫 C 得以解析拓展，而且在 C 的邻域满足 (19.12)——此处 $t_1=c_1, \cdots, t_m=c_m$——則当 $t_1-c_1, \cdots, t_m-c_m$ 充分小时，$y_j=\varphi_j(x, t_1, \cdots, t_m)$ $(j=1, 2, \cdots, n)$ 沿着曲綫 C 也得以解析拓展，满足 (19.12)，并且是 $x, t_1, \cdots, t_m$ 的解析函数。

❶ 由于此时 $(s, y_1, \cdots, y_n, t_1, \cdots, t_m)\in D'$ 的緣故。——譯者注

§24 奇　解

先考虑一个单一的微分方程

$$F(x, y, y')=0. \tag{24.1}$$

变数是实数或复数都可以，但是为了使討論确定起見，設变数是实数，并設方程的左端有关于 x, y, y' 的連續偏导数。

設 $x=a, y=b, y'=b'$ 滿足方程(24.1)，并且 $F_{y'}(x, y, y')$ 在 (a, b, b') 不等于零，則由隐函数存在定理，关于 y' 的方程(24.1)，有唯一的解使得当 $(x, y)\to(a, b)$ 时，$y'\to b'$。設此解为

$$y'=f(x, y), \tag{24.2}$$

則此式右端在 (a, b) 的邻域是連續的，并且有关于 x, y 的連續偏导数。由定理1，(24.2)有唯一解，滿足条件：当 $x=a$ 时 $y=b$。所以(24.1)也有唯一解，滿足条件：当 $x=a$ 时 $y=b, y'=b'$。象这样的，由 Cauchy 存在定理保証其存在的解叫做**特解**。所謂**通解**就是含有任意常数的解，并且給出其值以后，它就是一个特解。与此相反，若有不是上面所定义的特解的解，我們就称它为**奇解**。

設 $y=\varphi(x)$ 在它的定义区間上任何部分都不是(24.1)的特解，并命 $b=\varphi(a)$，$b'=\varphi'(a)$。設 $y=\varphi(x)$ 是(24.1)的解，且滿足 $x=a, y=b, y'=b'$。若 $F_{y'}(x, y, y')$ 在 (a, b, b') 不等于零，$y=\varphi(x)$ 就应該是(24.1)的特解，这就与我們的假定不合了；因而 $F_{y'}(x, y, y')$ 在 (a, b, b') 等于零。因为 a 可以是 x 的任意值，所以 $y=\varphi(x)$ 恒等地滿足

$$F_{y'}(x, y, y')=0. \tag{24.3}$$

因此，可以定义滿足(24.3)的解为奇解。

把解 $y=\varphi(x)$ 代入(24.1)就得到一个恒等式，关于 x 微分这一恒等式，又得到

$$F_x+y'F_y+y''F_{y'}=0.$$

当 $y=\varphi(x)$ 是奇解时，(24.3)就成立，因而得到

$$F_x(x, y, y')+y'F_y(x, y, y')=0. \tag{24.4}$$

因此，我們知道奇解不仅满足 (24.3)，而且也满足 (24.4)。为此，欲求 (24.1) 的奇解时，只要求同时满足 (24.1)，(24.3)，(24.4) 的 x 的函数 y 就可以了。如果不存在这样的函数，就是說方程沒有奇解。

例 $$y'^2+y^2=a^2$$

相当于(24.3)，(24.4)的方程就是

$$y'=0, \quad yy'=0,$$

从这两个方程和原方程就得到奇解 $y=\pm a$.

习题 上例方程的通解是 $y=a\sin(x-c)$，試証奇解是它的包絡綫。

如果通解所表示的曲綫族有包絡綫，則这一包絡綫就是奇解所表示的曲綫。例如 $y=\varphi(x, C)$ 是(24.1)的通解，而 $y=\psi(x)$ 表示它的包絡綫 Γ. 由包絡綫的定义，在 Γ 上的任一点 $(a, \psi(a))$ 都有曲綫族 $y=\varphi(x, C)$ 的一条曲綫 $y=\varphi(x, C_a)$ 与 Γ 相切。从而 $y=\psi(x)$ 与 $y=\varphi(x, C_a)$ 在点 $x=a$ 处不仅有相等的函数値；而且也有相等的导函数値。象这样的解至少存在两个。这一事实說明了解 $y=\psi(x)$ 不是 Cauchy 存在定理所保証存在的。因此 $y=\psi(x)$ 确实是奇解了。

对于高阶微分方程

$$F(x, y, y', \cdots, y^{(n)})=0, \tag{24.5}$$

也同样地定义奇解。

設(24.5)的左端有关于 $x, y, y', \cdots, y^{(n)}$ 的連續偏导数。若当

$$x=a, \quad y=b, \quad y'=b_1, \cdots, y^{(n)}=b_n$$

时，(24.5)被满足，而且

$$\frac{\partial}{\partial y^{(n)}}F(x, y, y', \cdots, y^{(n)})$$

不等于0，則关于 $y^{(n)}$ 的方程(24.5)有唯一解：使当 $(x, y, y', \cdots, y^{(n-1)}) \to (a, b, b_1, \cdots, b_{n-1})$ 时，$y^{(n)} \to b_n$；今設此解为

$$y^{(n)} = f(x, y, y', \cdots, y^{(n-1)}), \tag{24.6}$$

則等式右端有关于

$$x, y, y', \cdots, y^{(n-1)}$$

的連續偏导数❶，因而(24.6)有唯一解，使得当 $x=a$ 时，

$$y=b, \ y'=b_1, \ \cdots, \ y^{(n-1)}=b_{n-1}❷.$$

这样的解叫做特解。在它的定义区間的任一部分都不是原方程的特解的解，叫做奇解。容易知道它满足

$$\frac{\partial}{\partial y^{(n)}} F(x, y, y', \cdots, y^{(n)}) = 0. \tag{24.7}$$

若从(24.5)与(24.7)消去 $y^{(n)}$，可以得到阶数最高是 $n-1$ 的微分方程。因此，求 n 阶微分方程的奇解的問題就归結到求最高为 $(n-1)$ 阶微分方程的解的問題。

习題　試証(24.5)的奇解滿足

$$\frac{\partial F}{\partial x} + y' \frac{\partial F}{\partial y} + \cdots + y^{(n)} \frac{\partial F}{\partial y^{(n-1)}} = 0.$$

---

❶ 这是根据多变数的隐函数存在定理知道的。——譯者注

❷ 参看§15开始部分。——譯者注

第3章　不变点的存在定理

解微分方程

$$dy/dx=f(x,y)$$

的初值問題与求积分方程

$$y(x)=b+\int_a^x f(t,y(t))dt$$

的解可以說是同一件事。同样，在边界值問題上，問題归結到解如下的积分方程：

$$y(x)=\int_a^{a'} f(x,t,y(t))dt.$$

此时，在区間 $a\leqslant x\leqslant a'$ 上的連續函数 $y(x)$ 与由等式

$$z(x)=\int_a^{a'} f(x,t,y(t))dt$$

所定义的函数 $z(x)$ 之間有一个对应关系 T，并以 $z=Ty$ 表之。如此，积分方程可写为 $y=Ty$. 把 T 看作变换时，滿足 $y=Ty$ 的 y，它的位置在这一变換下是不变的，于是在这一意义之下称它为**不变点**。肯定滿足如此关系的 y 的存在的定理就是不变点的存在定理。这一章的目的就是要导出在研究微分方程时所常用的不变点的存在定理。

§25 Banach 空間

今后有区分函数与函数值的必要，因此先将表示这两个概念的方法叙述如下：

以 Euclid 空間 $\mathfrak{R}^n$❶ 中的点集合 E 为变域的函数表为 f，同

❶ $\mathfrak{R}^n$ 表 n 維 Euclid 空間。——原书注

时，这一函数在 E 的点 x 所取之函数值以 fx 表示之。函数值可以是普通的数，甚至可以是 Euclid 空間 $\mathfrak{R}^n$ 的点。把表示 x 的函数写为 $f(x)$ 虽是通常的习惯，但是这一記法究竟表示函数本身还是表示函数值却并不是断然可知的，因此，在表示函数本身时不再記以 x，这是須要特别注意的。

以 $\mathfrak{C}(E)$ 表示以E为变域的連續函数的全体。当 f，g 都屬于 $\mathfrak{C}(E)$时，$f+g$ 是如下定义的函数：$f+g$ 在 x 所取的值 $(f+g)x$ 由

$$(f+g)x=fx+gx$$

所給出❶。并且对于数 λ——λ 是实数或复数均可——，λf 是如下定义的函数：λf 在 x 所取的值 $(\lambda f)x$ 由

$$(\lambda f)x=\lambda(fx)$$

所給出❷。$f+g$，λf 都是以 E 为变域的連續函数，显然，更有下述运算法則成立：

(1) $f+g=g+f$ （交換律），

(2) $(f+g)+h=f+(g+h)$ （結合律），

(3) 当給定 f，g 时存在 h，使得 $f=g+h$，

(4) $\lambda(\mu f)=(\lambda\mu)f$ （結合律），

(5) $\left.\begin{array}{l}\lambda(f+g)=\lambda f+\lambda g\\(\lambda+\mu)f=\lambda f+\mu f\end{array}\right\}$ （分配律），

(6) $1\cdot f=f$。

一般說，給出集合 $\mathfrak{C}$ 的两个元素 f，g 的和 $f+g$ 的定义，数 λ 与 $\mathfrak{C}$ 的元素 f 的积 λf 的定义，而且 $f+g$，λf 都屬于 $\mathfrak{C}$，并且上述六个条件得到满足，則称 $\mathfrak{C}$ 为**綫性空間或向量空間**。

由这些假定出发可以得到下述事实：对于所有 $f\in\mathfrak{C}$❸ 存在唯

---

❶ $\mathfrak{R}^n$ 的两点之和，是以此两点所对应的坐标之和为坐标之点。——原书注

❷ 数 λ 与 $\mathfrak{R}^n$ 的点的积是以 λ 与此点坐标之积为坐标之点。——原书注

❸ 这表示 f 是 $\mathfrak{C}$ 的元素，对于所有屬于 $\mathfrak{C}$ 的元素 f 就簡单地用这样的方式写出。——原书注

一的 $o\in\mathfrak{C}$，使得 $f+o=f$；如果 $\lambda f=o$ 则 $\lambda=0$ 或 $f=o$，反之

$$0f=o,\quad \lambda o=o.$$

这些都是代数学上的定理，这里不再一一論述。滿足 $f=g+h$ 的 h 叫做 f, g 之差，并以 $f-g$ 表之。$\mathfrak{C}$ 的元素称为点，$\mathfrak{C}$ 的子集合称为**点集合**。

考虑 $\mathfrak{C}(E)$. 如果函数值是实数或复数，以 $|f|$ 表示在 $x\in E$ 所取值为 $|fx|$ 的函数。当函数值是 $\mathfrak{R}^n$ 的点时，以 $|f|$ 表示在 $x\in E$ 所取值等于 o 与 fx 的距离的函数。显然 $|f|$ 是在 E 連續的实函数。特别，在 E 是有界閉集合的情况下，$|f|$ 可以在 E 上取最大值，以 $\|f\|$ 表示最大值，并称之为 f 的范。f 的范滿足下述条件：

(7) $\|f\|\geqslant 0$, 但 $\|f\|=0$ 与 $f=o$ 是等价的，

(8) $\|f+g\|\leqslant\|f\|+\|g\|$,

(9) $\|\lambda f\|=|\lambda|\cdot\|f\|$.

一般，对于綫性空間 $\mathfrak{C}$ 的各个元素 f，有零或正数 $\|f\|$ 与之对应，且上述三个条件得到滿足，則称 $\mathfrak{C}$ 为**范空間**，称 $\|f\|$ 为 f 的**范**。从而 $\mathfrak{C}(E)$ 当 E 是有界閉集合时就是范空間。当范空間又是完备的，也就是下述条件得到滿足时，称它为 Banach 空間：

(10) 若当 $m, n\to\infty$ 时，$\|f_m-f_n\|\to 0$，則有 $f\in\mathfrak{C}$ 存在使得 $\|f_n-f\|\to 0$.

$\mathfrak{C}(E)$ 是滿足这一条件的。

条件 $\|f_m-f_n\|\to 0$ 与下一事实等价：对于任意給定的正数 ε，若 N 取得充分大时，只要 $m, n\geqslant N$ 就有 $\|f_m-f_n\|\leqslant\varepsilon$. 它也与这一事实等价，即对于 E 的所有点 x，

$$|f_m x-f_n x|\leqslant\varepsilon$$

成立。这也就是說，函数列 $\{f_n\}$ 在 E 上是一致收斂的。从而它的极限函数 f 是存在的，而且 f 在 E 上是連續的。这样一来函数列 $\{f_n\}$ 一致收斂于 f，所以有 $\|f_n-f\|\to 0$.

§26 关于点集合的一些概念

在范空間里$\|f-g\|$叫做f, g間的距离。

习题1 試証三角不等式$\|f-g\|+\|g-h\|\geqslant\|f-h\|$是成立的。

在$\mathfrak{E}$内的所有与f的距离小于δ的点的集合叫做f的δ邻域。$\|f_n-f\|\to 0$时,称点列$\{f_n\}$收斂于f. 这可表示为

$$\lim f_n=f \text{ 或 } f_n\to f.$$

此时对于任意給定的正数ε, 若N取得充分大时, 只要$n\geqslant N$, $\|f_n-f\|<\varepsilon$就成立。若$m\geqslant N$, $\|f_m-f\|<\varepsilon$也成立,所以

$$\|f_m-f_n\|=\|(f_m-f)+(f-f_n)\|$$
$$\leqslant\|f_m-f\|+\|f-f_n\|<2\varepsilon.$$

由于2ε也可以看成是任意給定的正数,所以,如果点列$\{f_n\}$是收斂的,我們有下述事实:对于任意給定的正数ε, 使N取充分大的值,只要$m, n\geqslant N$就有$\|f_m-f_n\|<\varepsilon$. 特别在Banach空間里,由条件(10)可知其逆也成立; 据此,点列$\{f_n\}$收斂的充分而且必要的条件就是$\|f_m-f_n\|\to 0$.

习题2 当$f_n\to f$, $g_n\to g$时,試証$f_n+g_n\to f+g$.

习题3 当$\alpha_n\to\alpha$, $f_n\to f$时,試証$\alpha_n f_n\to\alpha f$.

如果f的任意一个邻域都含有属于$\mathfrak{F}$而异于f的点,则称f为$\mathfrak{F}$的极限点。也可以这样定义,就是:自$\mathfrak{F}$取出异于f的点而作成一个收斂于f的点列时,则叫f为$\mathfrak{F}$的极限点。极限点的集合叫做导集合。$\mathfrak{F}$与它的导集合的并集合叫做$\mathfrak{F}$的閉包,以$\overline{\mathfrak{F}}$表之。

习题4 試証下面的三个条件彼此等价:

(1) $f\in\overline{\mathfrak{F}}$.

(2) f的任意一个邻域都含有$\mathfrak{F}$的点。

(3) 可以自$\mathfrak{F}$取出一个收斂于f的点列。

$\mathfrak{F}=\overline{\mathfrak{F}}$时称$\mathfrak{F}$为閉集合,当$\mathfrak{F}$的余集合(由属于$\mathfrak{E}$而不属于$\mathfrak{F}$

的点所成的集合)是閉集合时,称 $\mathfrak{F}$ 为开集合。f 有一个邻域,它为 $\mathfrak{F}$ 所包含,則称 f 为 $\mathfrak{F}$ 的**內点**。$\mathfrak{F}$ 的余集合的內点,或者說 f 有一个邻域它不含有 $\mathfrak{F}$ 的点叫做 $\mathfrak{F}$ 的**外点**。对于既非內点又非外点的点,它的任意一个邻域既含有属于 $\mathfrak{F}$ 的点也含有不属于 $\mathfrak{F}$ 的点,叫做 $\mathfrak{F}$ 的**界点**。

內点的集合叫做**內部**,外点的集合叫做**外部**,界点的集合叫**界**。

如上所述,可以把对于 Euclid 空間 $\mathfrak{R}^n$ 的很多概念推广到 Banach 空間里去。

§27 正 規 族

如果 $\mathfrak{F}$ 是以 E 为定义域的連續函数的集合,并且自 $\mathfrak{F}$ 取出的函数列永远含有在 E 上一致收斂的子列,則称 $\mathfrak{F}$ 为**正規族**。所謂函数列 $\{f_k\}$ 在 E 上一致收斂于 f,就是指下述事实而言:对于 E 的任一点 $\boldsymbol{a}$ 与正数 ε,选取适当的正数 δ 与自然数 N,只要 $\boldsymbol{x}\in E$ 满足 $|\boldsymbol{x}-\boldsymbol{a}|<\delta$ 与自然数 k 满足 $k\geqslant N$,就有 $|f_k\boldsymbol{x}-f\boldsymbol{a}|<\varepsilon$ 成立❶。下一定理給出函数族 $\mathfrak{F}$ 是正規族的充要条件。

❶ 这里所說的函数列 $\{f_k\}$ 于 E 一致收斂于 f,与 §25 里所說的是不同的。如取 $f_k=x^k\,(k=1,2,\cdots)$, $f=0$, $E=[0,1)$,則按此处定义 $f_k\xrightarrow{\text{一致}}f$;而按 §25 的定义却不然。又如取 $E=[0,1)$, $f_k(x)=\begin{cases}1 \\ \frac{1}{k}\end{cases}$ 当 $x=\begin{cases}0\\ \text{其他}\end{cases}$, $f=\begin{cases}1\\0\end{cases}$ 当 $x=\begin{cases}0\\ \text{其他}\end{cases}$,則按 §25 的定义 f_k 一致收斂于 f,而按此处定义却不是。

但在特殊情况下,比如 E 为有界閉集合以及 f 連續,則由此处定义可导致 §25 的定义。因任取 $\varepsilon>0$,对于每个 $\boldsymbol{a}\in E$, $\exists\delta(\boldsymbol{a})$, $N(\boldsymbol{a})$:当 $\boldsymbol{x}\in E$, $|\boldsymbol{x}-\boldsymbol{a}|<\delta(\boldsymbol{a})$,及 $k\geqslant N$,則 $|f_k\boldsymbol{x}-f\boldsymbol{a}|<\frac{\varepsilon}{2}$, $|f\boldsymbol{x}-f\boldsymbol{a}|<\frac{\varepsilon}{2}$。而依 Hero-Borel 复盖定理,必有 $\boldsymbol{a}_i\,(i=1,2,\cdots,m)$,使得 $\boldsymbol{a}_i$ 的 $\delta(\boldsymbol{a}_i)$ 邻域的并集合复盖 E;相应地有 $N_i\,(i=1,2,\cdots,m)$,取 $N=\max\limits_{1\leq i\leq m}\{N_i\}$ 即可。又如 f 連續于 E,則由 §25 的定义可导致此处定义。因任設 $\varepsilon>0$,任取 $\boldsymbol{a}\in E$,則由于假設必有 N:当 $k\geqslant N$,則 $|f_k-f|\leqslant\frac{\varepsilon}{2}$,以及 $\delta>0$:当 $|\boldsymbol{x}-\boldsymbol{a}|<\delta$ 时,則 $|f\boldsymbol{x}-f\boldsymbol{a}|\leqslant\frac{\varepsilon}{2}$,此 N, δ 即合于所求。

故当 E 为有界,閉集合,$\mathfrak{F}$ 是 E 上連續函数集,則此两定义是一致的。——譯者注

定理1 以 E 为定义域的連續函数的集合 $\mathfrak{F}$ 是正規族的充分而且必要的条件，就是在 E 中每个点，集合 $\mathfrak{F}$ 是有界的，而且也是等度連續的。

所謂 $\mathfrak{F}$ 在 $a\in E$ 是**等度連續**的，就是說对于任意的正数 ε 选取适当的 $\delta>0$，只要属于 E 的 x 与 a 的距离小于 δ，对于所有 $f\in\mathfrak{F}$ 必有

$$|fx-fa|<\varepsilon \tag{27.1}$$

成立。由于属于 $\mathfrak{F}$ 的函数是連續的，所以，对关于 f 在 a 满足 (27.1) 的 δ_f 来說永远可以取到，这一 δ_f 的选取与 f 无关的情况就叫做等度連續的❶。

条件的必要性沒有利用的机会，故略去不証，只証明条件的充分性。

由于 E 是 Euclid 空間 $\mathfrak{R}^n$ 的点集合，故可以自 E 选取一个适当的可列集 D 使得 $E\subseteq\overline{D}$。設 $a_1, a_2, \cdots, a_k, \cdots$ 为 D 的点，$\{f_k\}$ 是自 $\mathfrak{F}$ 取出的函数列，自 $\{f_k\}$ 中选取在 D 收斂的子列时，可以使用我們所熟知的对角綫理論。

首先，由于 $\{f_k a_1\}$ 是有界的，所以从它取出收斂的子列 $\{f_{1,k}a_1\}$。$\{f_{1,k}\}$ 是 $\{f_k\}$ 的一个子列，而且也是自 $\mathfrak{F}$ 取出的函数列，所以 $\{f_{1,k}a_2\}$ 也是有界的。从 $\{f_{1,k}a_2\}$ 取出一个收斂子列 $\{f_{2,k}a_2\}$。由于 $\{f_{2,k}\}$ 是 $\{f_{1,k}\}$ 的子列，所以 $\{f_{2,k}\}$ 在 a_1 也是收斂的。由于 $\{f_{2,k}a_3\}$ 是有界的，故可以从它取出收斂的子列 $\{f_{3,k}a_3\}$。仿此継續作下去，就可得到一列具有下述性质的函数列

❶ 这里所說"等度連續"，卽上文所說的"$\mathfrak{F}$ 在 $a\in E$ 等度連續"；非一般等度連續［对于 $\varepsilon>0$，$\exists\delta>0$：当 $|x-x'|<\delta$，$x, x'\in E$，則 $|fx-fx'|<\varepsilon$，此处 f 为 $\mathfrak{F}$ 中每一个］。甚至于 $\mathfrak{F}$ 在每一个 $a\in E$ 等度連續也与后者并不一致；显然此时后者可將前者推导出来，但逆之則不然，例如：

$$E=(0,\infty),\quad \mathfrak{F}=\left\{\frac{1}{nx},\ n=1,2,\cdots\right\}.$$

特殊地，当 E 为有界閉集合，則二者一致。——譯者注

$\{f_{h,k}\}_{k=1,2,\cdots}(h=1, 2, \cdots)$:

$\{f_{h,k}\}_{k=1,2,\cdots}$ 是 $\{f_{h-1,k}\}_{k=1,2,\cdots}$ 的子列，而且在 $\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2, \cdots, \boldsymbol{a}_h$ 是收斂的。

命 $f'_k=f_{kk}(k=1, 2, \cdots)$，除去 $\{f'_k\}$ 的前 h 个后，所得到的函数列是 $\{f_{h,k}\}_{k=1,2,\cdots}$ 的子列，因而它在 $\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2, \cdots, \boldsymbol{a}_h$ 是收斂的。h 可以取任一自然数，因而 $\{f'_k\}$ 在 D 內是收斂的。

由此可証，自 $\mathfrak{F}$ 所取出的函数列 $\{f_k\}$ 在使得 $E\subseteq\overline{D}$ 之 D 內收斂时，$\{f_k\}$ 就在 E 上一致收斂。

設 $\boldsymbol{a}\in E$, $\varepsilon>0$. 由于等度連續性，适当地选取 $\delta>0$，使得 $|\boldsymbol{x}-\boldsymbol{a}|<\delta$ 的 $\boldsymbol{x}\in E$ (27.1) 对于所有 $f\in\mathfrak{F}$ 都可以成立。从而可以命 $f=f_k$. 因为 $E\subseteq\overline{D}$，所以存在 $\boldsymbol{a}_h$ 使得 $|\boldsymbol{a}_h-\boldsymbol{a}|<\delta$. 从而对于这样的 h 与所有的 k

$$|f_k\boldsymbol{a}_h-f_k\boldsymbol{a}|<\varepsilon \tag{27.2}$$

成立。又 $\{f_k\}$ 在 $\boldsymbol{a}_h$(此 h 看做是固定的)是收斂的，所以当自然数 N 取得充分大时，只要 $p, q\geqslant N$，就有

$$|f_p\boldsymbol{a}_h-f_q\boldsymbol{a}_h|<\varepsilon \tag{27.3}$$

成立。在(27.2)內可以取 $k=p, q$，因而有

$$|f_p\boldsymbol{a}_h-f_p\boldsymbol{a}|<\varepsilon, \quad |f_q\boldsymbol{a}_h-f_q\boldsymbol{a}|<\varepsilon.$$

由这两个不等式与(27.3)就可以得到

$$|f_p\boldsymbol{a}-f_q\boldsymbol{a}|<3\varepsilon. \tag{27.4}$$

这就說明了 $\{f_k\boldsymbol{a}\}$ 是收斂的。于此可知，$\{f_k\}$ 不仅在 D 內收斂，而且在 E 內也是收斂的。設它的极限函数为 f.

其次証明收斂的一致性。

在(27.4)內設 $q\to\infty$ 并以 k 替换 p，则当 $k\geqslant N$ 时就得到

$$|f_k\boldsymbol{a}-f\boldsymbol{a}|\leqslant 3\varepsilon. \tag{27.5}$$

在(27.1)內可以取 $f=f_k$，因而有

$$|f_k\boldsymbol{x}-f\boldsymbol{a}|\leqslant|f_k\boldsymbol{x}-f_k\boldsymbol{a}|+|f_k\boldsymbol{a}-f\boldsymbol{a}|<4\varepsilon.$$

于此收斂的一致性就得到証明。

在范空間里相当于正規族的概念叫做列緊性。也就是說，如果范空間 $\mathfrak{C}$ 里的点集合 $\mathfrak{F}$ 中每一个无穷点列都有一个收斂的子列，$\mathfrak{F}$ 就叫做列緊的。例如，当 E 是有界閉集合从而 $\mathfrak{C}(E)$ 是 Banach 空間时，我們說 $\mathfrak{C}(E)$ 的子集合 $\mathfrak{F}$ 作为 Banach 空間里的点集合是列緊的，或說 $\mathfrak{F}$ 作为 E 上的函数族是正規的。这两种說法实质上是用不同的語言表述同一件事实。

§28 复蓋定理

在这一节里，我們要把在 $\mathfrak{R}^n$ 的情况中所已知的复蓋定理扩張到范空間里去。

定理 2 設 $\mathfrak{F}$ 是范空間里的列緊的集合，并且对于每一个 $f\in\mathfrak{F}$ 都有一个正数 δ_f 与之对应。此时可以适当地选取 $\mathfrak{F}$ 的点作出有限或无限点列 $\{f_k\}$，使得下述条件得到滿足：

1° 命 f_k 的 δ_{f_k} 邻域为 $\mathfrak{U}_k$，$\mathfrak{F}$ 为 $\{\mathfrak{U}_k\}$ 所复蓋，即 $\mathfrak{F}$ 含于 $\{\mathfrak{U}_k\}$ 的并集合。

2° 如果 $k>h$ 則 f_k 不属于 $\mathfrak{U}_h$。

首先，考慮存在正数 δ 对于所有 $f\in\mathfrak{F}$, $\delta_f\geqslant\delta$ 的情形。

从 $\mathfrak{F}$ 任意取出一个 f_1. 如果 $\mathfrak{F}$ 为 f_1 的 δ_{f_1} 邻域 $\mathfrak{U}_1$ 所复蓋，那末定理已成立。如果不是这样，$\mathfrak{F}$ 必有不属于 $\mathfrak{U}_1$ 的点，設这种点的一个为 f_2，如果 $\mathfrak{F}$ 为 $\mathfrak{U}_1$ 与 f_2 的 δ_{f_2} 邻域 $\mathfrak{U}_2$ 所复蓋，那末定理也已經成立。如果不是这样，$\mathfrak{F}$ 必有既不属于 $\mathfrak{U}_1$ 也不属于 $\mathfrak{U}_2$ 的点。設这种点的一个为 f_3. 假定总是这样地継續作下去，就得到无限点列 $\{f_k\}$. 显然定理的条件 2° 已被滿足。

因为 $\mathfrak{F}$ 是列緊的，所以可从 $\{f_k\}$ 取出一个收斂的子列 $\{f'_k\}$. 由于收斂性，对于此 $\delta>0$，只要 p, q 充分大，就有 $\|f'_q-f'_p\|<\delta$ 成立。$\{f'_k\}$ 是 $\{f_k\}$ 的子列，所以必有这样的 h,k 使得 $f_h=f'_p$, $f_k=f'_q$,

从而使 $\|f_h-f_k\|<\delta$ 成立的 h, k 是存在的。設 $h<k$, f_k 就不属于 $\mathfrak{U}_h$, 因而 $\|f_k-f_h\|\geqslant\delta_{f_h}$. 但是 $\delta_{f_h}\geqslant\delta$, 这一事实与前面的不等式发生了矛盾。

所以上述作法不能无限止地进行下去,在这样的情形下,存在着有限点列 $\{f_k\}$ 且满足定理的条件。

現在考慮对于所有的 $f\in\mathfrak{F}$ 使得 $\delta_f\geqslant\delta$ 的 $\delta>0$ 不存在的情况。此时，我們不知道是否存在有满足定理条件的有限点列 $\{f_k\}$. 但是这种情况没有考慮的必要，因而可以設，对于有限点列 $\{f_k\}$ 来說,定理的条件沒有得到满足。

考慮 $\mathfrak{F}$ 的使得 $\delta_f\geqslant 1$ 的点 f 的集合 $\mathfrak{F}_1$. 由列紧性的定义，列紧集合的子集合显然仍是列紧的,因而 $\mathfrak{F}_1$ 是列紧集合。对于这样的集合 $\mathfrak{F}_1$ 可以应用业已証明了的結果。因此可以从 $\mathfrak{F}_1$ 取出有限个点 $f_1, f_2, \cdots, f_{n_1}$, 設 f_k 的 δ_{f_k} 邻域为 $\mathfrak{U}_k$, $\mathfrak{F}_1$ 可以被 $\{\mathfrak{U}_k\}_{k=1,2,\cdots,n_1}$ 所复盖,并且对于有限点列 $\{f_k\}_{k=1,2,\cdots,n_1}$ 定理的条件 2° 得到满足。如果 $\mathfrak{F}_1$ 是空集,就設 $n_1=0$.

在 $\mathfrak{F}$ 的不属于任何一个 $\mathfrak{U}_k(k=1, 2, \cdots, n_1)$ 的点 f 处如果有 $\delta_f\geqslant 1/2$, 就設这样的 f 的集合为 $\mathfrak{F}_2$. 則 $\mathfrak{F}_2$ 也是列紧的,应用业已証明了的結果,可从 $\mathfrak{F}_2$ 取出 $f_{n_1+1}, \cdots, f_{n_2}$, 設 $f_k(k=n_1+1, \cdots, n_2)$ 的 δ_{f_k} 邻域为 $\mathfrak{U}_k$, $\mathfrak{F}_2$ 可被 $\{\mathfrak{U}_k\}_{k=n_1+1,\cdots,n_2}$ 所复盖，并且对于有限点列 $\{f_k\}_{k=n_1+1,\cdots,n_2}$ 定理的条件 2° 得到满足。

$f_k(k=n_1+1, \cdots, n_2)$ 不属于任何 $\mathfrak{U}_h(h=1, 2, \cdots, n_1)$ 的并集合,因而定理的条件 2° 对于 $\{f_k\}_{k=1,2,\cdots,n_2}$ 是成立的。而且 $\mathfrak{F}_1$, $\mathfrak{F}_2$ 被 $\{\mathfrak{U}_k\}_{k=1,2,\cdots,n_2}$ 所复盖。从而 $\mathfrak{F}$ 的使得 $\delta_f\geqslant 1/2$ 的点也都被 $\{\mathfrak{U}_k\}_{k=1,2,\cdots,n_2}$ 所复盖。在 $\mathfrak{F}_2$ 是空集合的情况下取 $n_2=n_1$.

在 $\mathfrak{F}$ 的不属于任何一个 $\mathfrak{U}_k(k=1, 2, \cdots, n_2)$ 的点 f 处如果有 $\delta_f\geqslant 1/3$, 就設这样的 f 的集合为 $\mathfrak{F}_3$.

由于假定对于有限点列 $\{f_k\}$ 定理的两个条件沒有得到满足,

故依前述方法继續作下去，我們就得到无限点列$\{f_k\}$. 很明显，这时对于这一点列$\{f_k\}$，定理的条件2°已被满足，而且$\mathfrak{F}$的使得$\delta_f \geq 1/j$成立的点f被任何一个$\mathfrak{U}_k$ $(k=1, 2, \cdots, n_j)$所包含。因为对于任意$f\in\mathfrak{F}$，$\delta_f>0$，故可取到一个自然数j使得$\delta_f\geq 1/j$. 从而$\mathfrak{F}$的所有点都含于某一个$\mathfrak{U}_k(k=1, 2, \cdots)$，定理的条件1°也已得到满足。

定理3 假設对于范空間里列紧集合$\mathfrak{F}$的各点f都存在一个正数δ_f与之对应，为了可以取到一个有限点列使之满足定理2的条件1°, 2°，有下述条件中的任何一个成立就够了（但非必要的!）：

1° 对于所有$f\in\mathfrak{F}$，使得$\delta_f\geq\delta>0$成立的正数δ是存在的。

2° $\mathfrak{F}$是閉集合。

1° 成立的情况已經証明。在2°成立的情况下只要証明满足定理2的条件1°, 2°的点列$\{f_k\}$一定是有限的就可以了。如果$\{f_k\}$是无限点列，因为$\mathfrak{F}$是列紧的，故可以从$\{f_k\}$取出一个收斂的子列$\{f'_k\}$，又因$\mathfrak{F}$是閉集合，$\{f'_k\}$的极限点f属于$\mathfrak{F}$. 从而必有适当的号数p，使$f\in\mathfrak{U}_p$，即

$$\|f-f_p\|<\delta_{f_p}.$$

由于$f'_k\to f$，对于充分大的k

$$\|f'_k-f\|<\delta_{f_p}-\|f-f_p\|.$$

但必有这样的号数q，使得$f'_k=f_q$. 因为k可以任意增大，所以q也可以取到任意大的値。从而必有满足关系

$$\|f_q-f\|<\delta_{f_p}-\|f-f_p\|, \quad q>p$$

的号数q. 而

$$\|f_q-f_p\|\leq\|f_q-f\|+\|f-f_p\|<\delta_{f_p},$$

則f_q就属于$\mathfrak{U}_p$了，于是条件2°就不能得到满足。这是一个矛盾。因此满足1°, 2°的点列$\{f_k\}$一定是有限的。

§29 以有限維集合逼近列紧集合

我們要从已知的在有限維空間里不变点的存在定理来証明一般情况下的不变点的存在定理，这就需要利用以 Euclid 空間 $\mathfrak{R}^n$ 里的集合来逼近列紧集合。在証明这一点之前，先証明下一定理。

定理4 在范空間 $\mathfrak{E}$ 里，n 維子空間 $\mathfrak{E}_n$ 与 n 維 Euclid 空間 $\mathfrak{R}^n$ 是拓扑同型的。

先来定义 n 維子空間。

$\alpha_1 f_1+\alpha_2 f_2+\cdots+\alpha_n f_n$ 叫做 $f_1, f_2, \cdots, f_n$ 的綫性組合。如果在而且仅在 $\alpha_1=\alpha_2=\cdots=\alpha_n=0$ 的情况下这一綫性組合才等于 o，我們說 $f_1, f_2, \cdots, f_n$ 是**綫性无关**的。选取这 n 个綫性无关的点 $f_1, f_2, \cdots, f_n$ 的所有綫性組合的全体，显然它满足形成綫性空間的条件(1)～(6)(§25)。它就叫做由 $f_1, f_2, \cdots, f_n$ 所生成的子空間，n 就是这一子空間的維数。

$\mathfrak{E}_n$ 与 $\mathfrak{R}^n$ 是拓扑同型的，就是說 $\mathfrak{E}_n$ 与 $\mathfrak{R}^n$ 之間存在有一一对应，并且在这一对应之下，对于 $\mathfrak{E}_n$ 的收斂点列 $\{f_k\}$，有 $\mathfrak{R}^n$ 的收斂点列 $\{\boldsymbol{f}_k\}$ 与之对应，对于 $\lim f_k$ 有 $\lim \boldsymbol{f}_k$ 与之对应；反过来，对于 $\mathfrak{R}^n$ 的收斂点列 $\{\boldsymbol{f}_k\}$，有 $\mathfrak{E}_n$ 的收斂点列 $\{f_k\}$ 与之对应，对于 $\lim \boldsymbol{f}_k$ 仍然是 $\lim f_k$ 与之对应。

今設 $\mathfrak{E}_n$ 是由 n 个綫性无关的点 $f_1, f_2, \cdots, f_n$ 所生成的子空間，$\mathfrak{E}_n$ 的点 g 可以唯一地表示为

$$g=\xi_1 f_1+\xi_2 f_2+\cdots+\xi_n f_n. \tag{29.1}$$

理由如下：如 g 还可以写为

$$g=\xi_1' f_1+\xi_2' f_2+\cdots+\xi_n' f_n,$$

两式相减就得到

$$(\xi_1-\xi_1')f_1+(\xi_2-\xi_2')f_2+\cdots+(\xi_n-\xi_n')f_n=o,$$

因为 $f_1, f_2, \cdots, f_n$ 是綫性无关的，所以上一等式左端各项系数都

是零，从而 $\xi_1=\xi'_1$, $\xi_2=\xi'_2$, $\cdots$, $\xi_n=\xi'_n$.

設对于 g 有 $\mathfrak{R}^n$ 的以 $\xi_1, \xi_2, \cdots, \xi_n$ 为坐标的点 $\boldsymbol{g}$ 与之对应。又令 $\mathfrak{R}^n$ 的对应于 $\mathfrak{E}_n$ 的点 $f, g, \cdots$ 为点 $\boldsymbol{f}, \boldsymbol{g}, \cdots$.

設

$$g_k=\xi_1^{(k)}f_1+\xi_2^{(k)}f_2+\cdots+\xi_n^{(k)}f_n, \tag{29.2}$$

如 $\{\boldsymbol{g}_k\}$ 是 $\mathfrak{R}^n$ 里收斂于 $\boldsymbol{g}$ 的点列，則数列 $\{\xi_1^{(k)}\}$, $\{\xi_2^{(k)}\}$, $\cdots$, $\{\xi_n^{(k)}\}$ 分别收斂于 $\boldsymbol{g}$ 的坐标 $\xi_1, \xi_2, \cdots, \xi_n$.

因为

$$\|g_k-g\|\leqslant|\xi_1^{(k)}-\xi_1|\,\|f_1\|+|\xi_2^{(k)}-\xi_2|\,\|f_2\|+\cdots+|\xi_n^{(k)}-\xi_n|\,\|f_n\|,$$

所以 $\|g_k-g\|\to 0$, 从而 $g_k\to g$.

反过来，設 $g_k\to g$. 命

$$\rho_k^2=|\boldsymbol{g}_k|^2=|\xi_1^{(k)}|^2+|\xi_2^{(k)}|^2+\cdots+|\xi_n^{(k)}|^2,$$

如果 $\{\rho_k\}$ 不是有界的，可以适当选取它的一个子列 $\{\rho'_k\}$ 使得 $\rho'_k\to\infty$. 設对应于 $\{\rho_k\}$ 的子列 $\{\rho'_k\}$ 的是 $\{g_k\}$ 的子列 $\{g'_k\}$，而且設 $h'_k=\dfrac{1}{\rho'_k}g'_k$，因为 $|\boldsymbol{h}'_k|=1$，所以可以从 $\{\boldsymbol{h}'_k\}$ 取出一个子列 $\{\boldsymbol{h}''_k\}$，而它的极限点 $\boldsymbol{h}$ 不是 $\boldsymbol{o}$. 設对应于 $\{\boldsymbol{h}''_k\}$ 的是 $\{\rho'_k\}$ 的子列 $\{\rho''_k\}$，則 $\rho''_k\to\infty$. 因为 $\boldsymbol{h}''_k\to\boldsymbol{h}$，所以 $h''_k\to h$；又 $\boldsymbol{h}\neq\boldsymbol{o}$，所以 $h\neq o$. 另一方面，因为 $g_k\to g$，所以 $g''_k\to g$，从而

$$h''_k=\frac{1}{\rho''_k}\,g''_k\to 0\cdot g=o.$$

这一結果与 h''_k 的极限点 h 不等于 o 是互相矛盾的。

所以 $\{\boldsymbol{g}_k\}$ 在 $\mathfrak{R}^n$ 里就不可能不是有界的。考察它的一个收斂的子列 $\{\boldsymbol{g}'_k\}$，可以知道这个子列的极限点 $\lim\boldsymbol{g}'_k$ 是对应于 $\lim g'_k$ 的一个点。$\{g'_k\}$ 是 $\{g_k\}$ 的子列，所以 $g=\lim g'_k$，因而 $\boldsymbol{g}=\lim\boldsymbol{g}'_k$. 这就是說有界点列 $\{\boldsymbol{g}_k\}$ 的子列并不收斂于 $\boldsymbol{g}$ 以外的点。所以点列 $\{\boldsymbol{g}_k\}$ 收斂于 $\boldsymbol{g}$.

在叙述本节主要定理之前，先介紹今后就要用到的一些概念。

对于綫性空間里的点集合 $\mathfrak{K}$，如果 $f, g \in \mathfrak{K}$，且 $0<\lambda<1$，就有 $\lambda f+(1-\lambda)g \in \mathfrak{K}$，我們就說点集合 $\mathfrak{K}$ 是**凸**的。如把 $\lambda f+(1-\lambda)g$ $(0\leqslant\lambda\leqslant1)$ 所表示的点的全体叫做以 f, g 为端点的**綫段**，前述定义还可以用几何学的語言叙述为：如果以属于 $\mathfrak{K}$ 的任意两点为端点的綫段也为 $\mathfrak{K}$ 所包含，我們就定义 $\mathfrak{K}$ 是凸的。

設有两个范空間 $\mathfrak{E}$, $\mathfrak{E}'$ (或 $\mathfrak{E}=\mathfrak{E}'$)，并且 $\mathfrak{F}$ 是 $\mathfrak{E}$ 里的点集合。設 T 表示从 $\mathfrak{F}$ 的每一个点 f 到 $\mathfrak{E}'$ 的点 Tf 的对应。此刻，如果对于以 $\mathfrak{F}$ 的点为极限点的这样的 $\mathfrak{F}$ 的点列 $\{f_k\}$，等式

$$\lim Tf_k = T\lim f_k$$

恒成立，則我們称 T 为 $\mathfrak{F}$ 上的**連續函数**(或**連續映射**，**連續变換**)。$\mathfrak{E}'$ 的对应于 $f\in\mathfrak{F}$ 的点 Tf 的全体叫做 T 的**值域**。一般地，当 $\mathfrak{F}'\subseteq\mathfrak{F}$ 时，对应于 $f\in\mathfrak{F}'$ 的 Tf 的集合叫做在 T 之下的 $\mathfrak{F}'$ 的映象，并以 $T\{\mathfrak{F}'\}$ 表之。值域 $T\{\mathfrak{F}\}$ 是列紧集合时，我們說函数 T 是在 $\mathfrak{F}$ 上**完全連續**的。

定理 5 設 $\mathfrak{F}$ 是范空間 $\mathfrak{E}$ 里的列紧集合，$\mathfrak{K}$ 是包含着 $\mathfrak{F}$ 的一个凸集合，ε 是任意正数。此刻，存在着一个連續函数 T，它使得对于所有的 $f\in\mathfrak{F}$

$$\|Tf-f\|<\varepsilon, \tag{29.3}$$

而其值域含于有限維的子空間中，且把 $\mathfrak{F}$ 映射于 $\mathfrak{K}$ 里。

設 $\delta_f=\varepsilon$，应用复盖定理 3(1°)，可以知道 $\mathfrak{F}$ 可以被取自 $\mathfrak{F}$ 的有限个点 $f_1, f_2, \cdots, f_n$ 的 ε 邻域所复盖。設

$$\mu_j(f)=\max\{0,\ \varepsilon-\|f-f_j\|\}, \tag{29.4}$$

$$Tf=\sum_{j=1}^{n}\mu_j(f)f_j\Big/\sum_{j=1}^{n}\mu_j(f). \tag{29.5}$$

$\mu_j(f)>0$ 与 $\|f-f_j\|<\varepsilon$ 是等价的。若 f 属于 $\mathfrak{F}$，則有号数 j 使得 $\|f-f_j\|<\varepsilon$，因而对于此一个号数 j，$\mu_j(f)>0$。所以 $\sum\mu_j(f)$ 决不会是零，即(29.5)的分母在 $\mathfrak{F}$ 里也决不会是零。从而 Tf 在 $\mathfrak{F}$ 里

是連續的❶。因为 $f_1, f_2, \cdots, f_n$ 属于 $\mathfrak{K}$，所以 Tf 亦属于 $\mathfrak{K}$。

注意 1 如果 $f_1, f_2, \cdots, f_n$ 属于凸集合 $\mathfrak{K}$，则以其和为 1 的一些正数或有零为系数的 $f_1, f_2, \cdots, f_n$ 的綫性組合也属于 $\mathfrak{K}$。

要証明这一事实可以对 n 使用数学归納法。当 $n=2$ 时，由凸的定义，命題显然成立，今設在 $n-1$ 的情况下命題亦成立。命 $\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_n$ 是其和为 1 的一些正数或有零在内。命

$$\beta_j=\alpha_j/(\alpha_1+\cdots+\alpha_{n-1}) \quad (j=1, 2, \cdots, n-1),$$

$\beta_1, \cdots, \beta_{n-1}$ 是其和为 1 的一些正数或有零在内，由归納法的假定

$$g=\beta_1 f_1+\beta_2 f_2+\cdots+\beta_{n-1} f_{n-1}$$

属于 $\mathfrak{K}$. 命

$$\lambda=\alpha_1+\alpha_2+\cdots+\alpha_{n-1},$$

可以得到 $f=\lambda g+(1-\lambda)f_n$，$f$ 就属于 $\mathfrak{K}$。

写出

$$Tf-f=\sum_{j=1}^{n}\mu_j(f)(f_j-f)\Big/\sum_{j=1}^{n}\mu_j(f),$$

就得到

$$\|Tf-f\|\leqslant\sum\mu_j(f)\|f_j-f\|/\sum\mu_j(f).$$

$0\leqslant\mu_j(f)\leqslant\varepsilon$，而且对于 $\mu_j(f)>0$ 的号数 j，$\|f_j-f\|<\varepsilon$，因而 (29.3) 成立。

因 T 的值域含于由 $f_1, f_2, \cdots, f_n$ 所生成的有限維子空間中，所以在此处定理所要求的条件都确已得到滿足。

注意 2 既不限定 $f_1, f_2, \cdots, f_n$ 是綫性无关的，則由 $f_1, f_2, \cdots, f_n$ 所生

---

❶ Tf 在 $\mathfrak{F}$ 連續。

証 任取 $f\in\mathfrak{F}$，以及 $f^{(k)}\in\mathfrak{F}$ $(k=1, 2, \cdots)$，使得 $f^{(k)}\to f$，則

$$Tf=\frac{\sum_{j=1}^{n}\mu_j(f)f_j}{\sum_{j=1}^{n}\mu_j(f)}, \quad Tf^{(k)}=\frac{\sum_{j=1}^{n}\mu_j(f^{(k)})f_j}{\sum_{j=1}^{n}\mu_j(f^{(k)})}.$$

由于 $\mu_j(f)=\max\{0, \varepsilon-\|f-f_j\|\}=\dfrac{(\varepsilon-\|f-f_j\|)+|\varepsilon-\|f-f_j\||}{2}$，以及范数三角不等式，依 $f^{(k)}\to f$，可証得 $\mu_j(f^{(k)})\to\mu_j(f)$，从而得知

$Tf^{(k)}\to Tf$. ——譯者注

成的空間，也就是它們綫性組合的全体，也不一定是 n 維子空間。或許它的維数比 n 小。

属于 T 的値域的点只是含于 $\mathfrak{K}$ 中，并且含于以和数正好是1的一些正数或有零在内为系数的 $f_1, f_2, \cdots, f_n$ 的綫性組合的全体 $\mathfrak{K}'$ 中。显然 $\mathfrak{K}'$ 含于 $\mathfrak{K}$，$\mathfrak{K}'$ 自身也是有界凸閉集合❶。这一条注意是很重要的。

§30 Schauder 型的存在定理

今将作为本章主要目标的不变点的存在定理之一表述为

定理 6　設在范空間里，$\mathfrak{K}$ 是凸集合，$\mathfrak{S}$ 是含于 $\mathfrak{K}$ 的列紧的閉

---

❶ $\mathfrak{K}'$ 自身是有界，凸閉集合的証明。

証　依此处 $\mathfrak{K}'$ 定义，

$$\mathfrak{K}'=\left\{\alpha_1 f_1+\cdots+\alpha_n f_n \,\middle|\, \sum_{\substack{j=1\\0\leqslant\alpha_j}}^{n}\alpha_j=1\right\}$$

任取 $f\in\mathfrak{K}'$，令 $f=\sum\limits_1^n\alpha_j f_j$，从而 $\|f\|\leqslant\sum\limits_1^n|\alpha_j|\,\|f_j\|$，而每个 $|\alpha_j|\leqslant 1$，故

$$\|f\|\leqslant\sum_{j=1}^{n}\|f_j\|,$$

此即說 $\mathfrak{K}'$ 有界。

又任取 $f, g\in\mathfrak{K}'$，令 $f=\sum\limits_{j=1}^n\alpha_j f_j$，$g=\sum\limits_{j=1}^n\beta_j f_j$，从而

$$\lambda f=\sum_{j=1}^{n}\lambda\alpha_j f_j,\quad (1-\lambda)g=\sum_{j=1}^{n}(1-\lambda)\beta_j f_j,$$

此处 $0<\lambda<1$，于是

$$\lambda f+(1-\lambda)g=\sum_{j=1}^{n}(\lambda\alpha_j+(1-\lambda)\beta_j)f_j,$$

而

$$\sum_{j=1}^{n}(\lambda\alpha_j+(1-\lambda)\beta_j)=\lambda\sum_{j=1}^{n}\alpha_j+(1-\lambda)\sum_{j=1}^{n}\beta_j=1,$$

以及

$$\sum_{j=1}^{n}\lambda\alpha_j+(1-\lambda)\beta_j\geqslant 0$$

故 $\lambda f+(1-\lambda)g\in\mathfrak{K}'$，此即說 $\mathfrak{K}'$ 是凸集合。

又任取 $f^{(k)}\in\mathfrak{K}'$，且設 $\lim\limits_{k} f^{(k)}=f$。今令 $f^{(k)}=\sum\limits_{j=1}^n\alpha_j^{(k)}f_j$，由于 $0\leqslant\alpha_j^{(k)}\leqslant 1$，而 n 固定，故必有 $\{f^{(k)}\}$ 之子列 $\{f'^{(k)}=\sum\limits_{j=1}^n\alpha_j'^{(k)}f_j\}$ 使得 $\alpha_j'^{(k)}\to\bar{\alpha}_j$ $(j=1, 2, \cdots, n)$，作 $\bar{f}=\sum\limits_{j=1}^n\bar{\alpha}_j f_j$，則 $\bar{f}\in\mathfrak{K}'$，且 $f'^{(k)}\to\bar{f}$；但 $f'^{(k)}\to f$，从而 $f=\bar{f}$，于是 $f\in\mathfrak{K}'$，此即說 $\mathfrak{K}'$ 是閉集合。　　譯者注

集合，F 是将 $\mathfrak{K}$ 映射于 $\mathfrak{F}$ 中的連續映射。此时有使 $f=Ff$ 成立的 $f\in\mathfrak{F}$ 存在。

考虑对于任意正数 ε 而满足定理 5 的条件的映射 T. 由于 $(TF)f=T(Ff)$ 可以定义以 $\mathfrak{K}$ 为变域的連續映射 TF. T 的値域含于前节注意 2 所談到的凸閉集合 $\mathfrak{K}'$ 中。可以将 TF 看作以 $\mathfrak{K}'$ 为变域的映射。此时它的値域含于 $\mathfrak{K}'$ 中。$\mathfrak{K}'$ 在有限維的子空間——此空間与 Euclid 空間是拓扑同型的——是有界凸閉集合。在有限維 Euclid 空間的情况下，对于将有界凸集合映射于其自身中的連續映射必有不变点存在❶。如果承认这一事实，就不难知道在 $\mathfrak{K}'$ 中存在有 f，它满足 $f=TFf$. 由映射 T 的性质可知

$$\|TFf-Ff\|<\varepsilon,$$

因而 $\|f-Ff\|<\varepsilon$. 这就是說，对于任意正数 ε，满足 $\|f-Ff\|<\varepsilon$ 的 $f\in\mathfrak{K}$ 是存在的。

再考虑收斂于零的遞減列 $\{\varepsilon_k\}$. 既有满足 $\|f-Ff\|<\varepsilon_k$ 的 $f\in\mathfrak{K}$ 存在，可設 f_k 为其中的一个。因为 $\{Ff_k\}$ 是从列緊的集合 $\mathfrak{F}$ 所取出的点列，所以可以从它取出收斂的子列 $\{Ff'_k\}$. 設它的极限点为 f. $\mathfrak{F}$ 是閉集合，因而 f 属于 $\mathfrak{F}$ 从而也属于 $\mathfrak{K}$. 設对应于 $\{f'_k\}$ 的 $\{\varepsilon_k\}$ 的子列为 $\{\varepsilon'_k\}$，则 $\varepsilon'_k\to 0$，且 $\|f'_k-Ff'_k\|<\varepsilon'_k$ 成立。由于

$$\|f-f'_k\|\leqslant\|f-Ff'_k\|+\|Ff'_k-f'_k\|,$$

所以 $\|f-f'_k\|\to 0$，从而 $f'_k\to f$. 因为 $f'_k-Ff'_k\to 0$ 且 f 属于 $\mathfrak{K}$，所以由 F 的連續性就得到 $f=Ff$. 而 Ff 属于 $\mathfrak{F}$，所以 $f\in\mathfrak{F}$，于此定理便得到証明。

注意 1 定理中的 $\mathfrak{K}$ 如果是閉集合，那就不必再假設 $\mathfrak{F}$ 是閉集合了。这是由于，既有 $\mathfrak{K}\supseteq\mathfrak{F}$ 所以 $\mathfrak{K}=\overline{\mathfrak{K}}\supseteq\overline{\mathfrak{F}}$. 从而 $\overline{\mathfrak{F}}$ 是列緊的閉集合的緣故。以下証明 $\overline{\mathfrak{F}}$ 是列緊的閉集合。

❶ 此是所謂 Brouwer 不动点定理。它的最初形式是"有限維 Euclid 空間的閉单位球具有不动点性质"。此处所引用的是它的一个比較推广的形式"有限維 Euclid 空間的有界凸閉集合具有不动点性质"。——譯者注

設 $\{f_k\}$ 是从 $\mathfrak{F}$ 所取出的点列，$\{\varepsilon_k\}$ 是收斂于零的遞減列，則存在 $g_k\in\mathfrak{F}$ 使得 $\|f_k-g_k\|<\varepsilon_k$. 从 $\{g_k\}$ 可以取出收斂的子列 $\{g'_k\}$. 設 $\{f_k\}$，$\{\varepsilon_k\}$ 的与之对应的子列各为 $\{f'_k\}$，$\{\varepsilon'_k\}$，則有 $\|f'_k-g'_k\|<\varepsilon'_k$，$\varepsilon'_k\to 0$. 設 $\{g'_k\}$ 的极限点为 g，則

$$\|f'_k-g\|\leqslant\|f'_k-g'_k\|+\|g'_k-g\|,$$

因而 $\|f'_k-g\|\to 0$，从而 $f'_k\to g$. 故可以从 $\{f_k\}$ 取出收斂的子列。因而 $\mathfrak{F}$ 是列紧的。

其次，設从 $\mathfrak{F}$ 取出的点列 $\{f_k\}$ 是收斂的，并設 f 是它的极限点，則可以仿前那样定义 $\mathfrak{F}$ 的点列 $\{g_k\}$. 于是有

$$\|g_k-f\|\leqslant\|g_k-f_k\|+\|f_k-f\|,$$

因而 $\|g_k-f\|\to 0$，从而 $g_k\to f$，而且 f 的确属于 $\bar{\mathfrak{F}}$. 因而 $\mathfrak{F}$ 是閉集合。

現在来說明所証定理的应用。以下設变数都是实数，并且文字肩上的附号表示坐标的号数。考虑在

$$dy^j/dx=F^j(x,\ y^1,\ \cdots,\ y^n)\quad (j=1,\ 2,\ \cdots,\ n)\qquad(30.1)$$

的解中，求出 $x=a_j$ 时 $y^j=b^j$ $(j=1,\ 2,\ \cdots,\ n)$ 的解的問題。若 $a_1=a_2=\cdots=a_n$，这就是 Cauchy 初值問題。

(30.1)的右端在

$$a\leqslant x\leqslant a',\ |y^1-b^1|\leqslant\rho,\ \cdots,\ |y^n-b^n|\leqslant\rho\qquad(30.2)$$

内是連續的，設它的絕对值不超过 M，又設 $a_1,\ a_2,\ \cdots,\ a_n$ 滿足不等式

$$a_j-r_-\leqslant a\leqslant a_j\leqslant a'\leqslant a_j+r_+\quad (j=1,\ 2,\ \cdots,\ n),\qquad(30.3)$$

則以区間 $a\leqslant x\leqslant a'$ 为定义域的 n 个連續的实函数所构成的組 f——它被看做是以 $a\leqslant x\leqslant a'$ 为变域而值域含于 $\mathfrak{R}^n$ 的連續函数——的全体 $\mathfrak{C}[a,\ a']$，如 §25 所述，就是 Banach 空間。特別設滿足

$$|f^1(x)-b^1|\leqslant\rho,\ \cdots,\ |f^n(x)-b^n|\leqslant\rho\qquad(30.4)$$

的 $f^1,\ \cdots,\ f^n$ 的組 f 的全体为 $\mathfrak{K}$，且从 $\mathfrak{K}$ 所取出的点列 $\{f_k\}$ 收斂于 f，則所謂 f_k 属于 $\mathfrak{K}$ 就是說下列不等式：

$$|f^1_k(x)-b^1|\leqslant\rho,\ \cdots,\ |f^n_k(x)-b^n|\leqslant\rho$$

成立，因此当 $k\to\infty$，就得到 (30.4)，于是可知 f 属于 $\mathfrak{K}$. 所以 $\mathfrak{K}$ 是 $\mathfrak{C}[a, a']$ 里的閉集合。并且当 f, g 属于 $\mathfrak{K}$ 时， 命 $h=\lambda f+(1-\lambda)g$ $(0<\lambda<1)$，則由(30.4)与

$$|g^1(x)-b^1|\leqslant\rho, \cdots, |g^n(x)-b^n|\leqslant\rho, \tag{30.5}$$

可以直接得到

$$|h^1(x)-b^1|\leqslant\rho, \cdots, |h^n(x)-b^n|\leqslant\rho.$$

因而 h 也屬于 $\mathfrak{K}$，这就是說 $\mathfrak{K}$ 是凸的。

設对于属于 $\mathfrak{K}$ 的 f，使得由

$$g^j(x)=b^j+\int_{a_j}^{x} F^j(x, f^1(x), \cdots, f^n(x))dx \tag{30.6}$$

定义的 g 与之对应的映射为 $F: g=Ff$. 显然 g 屬于 $\mathfrak{C}[a, a']$. 更进一步考虑，如果更設 $Mr_{\pm}\leqslant\rho$，則当 $a\leqslant x\leqslant a'$，(30.5) 成立，因而 g 属于 $\mathfrak{K}$. 这就是說 F 是 $\mathfrak{K}$ 到 $\mathfrak{K}$ 自身里的映射。

設 $f_k\to f$，$\{f_k^1\}, \cdots, \{f_k^n\}$ 在 $a\leqslant x\leqslant a'$ 里分别一致收斂于 $f^1, \cdots, f^n$，因而命 $g_k=Ff_k$，$g=Ff$，則$\{g_k^1\}, \cdots, \{g_k^n\}$ 在 $a\leqslant x\leqslant a'$ 里分别一致收斂于 $g^1, \cdots, g^n$. 这是由映射 F 的定义得知的。所以 F 在 $\mathfrak{K}$ 里是連續的。

由(30.6)可知

$$g^j(x')-g^j(x)=\int_{x}^{x'} F^j(x, f^1(x), \cdots, f^n(x))dx$$

成立，故

$$|g^j(x')-g^j(x)|\leqslant M|x'-x| \quad (j=1, 2, \cdots, n) \tag{30.7}$$

成立。从而对于任意正数 ε，如果取正数 δ 使得 $\delta<\varepsilon/M$，則当 $|x'-x|<\delta$ 时 $|g^j(x')-g^j(x)|<\varepsilon$ 成立。由此可知，F 的值域 $F\{\mathfrak{K}\}$ 作为区間 $a\leqslant x\leqslant a'$ 上的函数族是等度連續的。而且由于 (30.5)成立，它也是有界的。所以由定理 1，$F\{\mathfrak{K}\}$ 作为 $a\leqslant x\leqslant a'$ 上的函数族，是正規的，这就是說它作为 $\mathfrak{C}[a, a']$ 里的点集合是列緊的。

于此可知，由定理6的注意，存在 f，它满足 $f=Ff$。对于这一 f，等式

$$f^j(x)=b^j+\int_{a_j}^{x}F^j(x,\ f^1(x),\ \cdots,\ f^n(x))dx \quad (j=1,\ 2,\ \cdots,\ n)$$

成立，于此命 $x=a_j$ 可以得到 $f^j(a_j)=b^j$。并且关于 x 微分这一关系式就可以知道 $y^j=f^j(x)\ (j=1,\ 2,\ \cdots,\ n)$ 是微分方程 (30.1) 的解。于是就得到下述定理。

定理 7　設(30.1)的右端在(30.2)里是連續的，而且它的絕对值不超过 M。如果 $a_1,a_2,\cdots,a_n$ 滿足不等式(30.3)，且有 $Mr_{\pm}\leqslant\rho$ 成立，则在区間 $a\leqslant x\leqslant a'$ 上存在 (30.1) 满足初始条件：当 $x=a_j$ 时，$y^j=b^j\ (j=1,\ 2,\ \cdots,\ n)$ 的解。

在第2章里曾假定 Lipschitz 条件是解存在的条件，現在看来，只談解的存在性，Lipschitz 条件就可以不考虑了。

注意 2　現在考虑在 n 阶微分方程

$$z^{(n)}=F(x,\ z,\ z',\ \cdots,\ z^{(n-1)}) \tag{30.8}$$

的解中，求当 $x=a_j$ 时 $z=b^j\ (j=1,\ 2,\ \cdots,\ n)$ 的解的問題。特别在 $n=2$ 的情况下，在关于 z 的二阶微分方程的解中求当 $x=a_1$ 时 $z=b^1$，当 $x=a_2$ 时 $z=b^2$ 的解，这就是典型的边界値問題。設

$$\varphi(x)=(x-a_1)(x-a_2)\cdots(x-a_n),$$

$$\varphi_j(x)=\varphi(x)/\varphi'(a_j)(x-a_j).$$

则 $\varphi_j(x)$ 就是 $(n-1)$ 次多项式，并且

$$\varphi_j(a_k)=\delta_{jk}=\begin{cases}1 & (j=k)\\ 0 & (j\neq k),\end{cases}$$

因而設

$$z=\sum_{j=1}^{n}\varphi_j(x)y^j,\ z'=\sum_{j=1}^{n}\varphi_j'(x)y^j,\ \cdots,\ z^{(n-1)}=\sum_{j=1}^{n}\varphi_j^{(n-1)}(x)y^j, \tag{30.9}$$

则所述問題就化为在关于 $y^1,\ \cdots,\ y^n$ 的微分方程的解中求当 $x=a_j$ 时 $y^j=b^j$ 的解的問題。关于 $y^1,\ \cdots,\ y^n$ 的微分方程就是

$$\frac{dy^j}{dx}=\frac{(a_j-x)^{n-1}}{(n-1)!}F(x,\ z,\ z',\ \cdots,\ z^{(n-1)}).$$

此等式右端的 $z,\ z',\ \cdots,\ z^{(n-1)}$ 分别表示(30.9)相应各式的右端。

§31 映 射 度

設 F 是将范空間 $\mathfrak{E}$ 里閉集合 $\mathfrak{D}$ 映射到 $\mathfrak{E}$ 里列緊集合 $F\{\mathfrak{D}\}$ 的連續映射，I 是恒等映射，即对于所有的 f 使 $If=f$ 的映射。此时如果 f 不属于 $\mathfrak{D}$ 的界「$\mathfrak{D}$」在 $I-F$ 之下的象 $(I-F)\{$「$\mathfrak{D}$」$\}$ 时，可以定义一个具有下列性质的整数 $d(f, \mathfrak{D}, I-F)$：

(1) 如果 f 不属于 $(I-F)\{\mathfrak{D}\}$，則 $d(f, \mathfrak{D}, I-F)=0$。

(2) 如果 $\mathfrak{D}_j(j=1, 2, \cdots, m)$ 是相互間沒有公共內点的閉集合，而且它們的界在 $I-F$ 之下的象不含有 f，且命 $\mathfrak{D}_j$ $(j=1, 2,\cdots, m)$ 的合并集合为 $\mathfrak{D}$，則

$$d(f, \mathfrak{D}, I-F)=\sum_{j=1}^{m} d(f, \mathfrak{D}_j, I-F)❶.$$

(3) 設 f, F 关于参变数 t 連續，且当 t 变化时 f 决不属于「$\mathfrak{D}$」在 $I-F$ 之下的象，且变化 t 而得到的集合 $F\{\mathfrak{D}\}$ 的合并集合也是列緊的。此时 $d(f, \mathfrak{D}, I-F)$ 为一与 t 无关的定值❷。

(4) 当 f 是 $\mathfrak{D}$ 的內点时 $d(f, \mathfrak{D}, I)=1$，当 f 是 $\mathfrak{D}$ 的外点时 $d(f, \mathfrak{D}, I)=0$❸.

具有上述性質的 $d(f,\mathfrak{D},I-F)$ 叫做在 $I-F$ 之下，$\mathfrak{D}$ 在 f 的

---

❶ 按以上規定，在 $f\overline{\in}(I-F)\{$「$\mathfrak{D}$」$\}$ 的条件下，才可以考慮 $d(f, \mathfrak{D}, I-F)$；这就是 (2) 中为什么要假設 $f\overline{\in}(I-F)\{$「$\mathfrak{D}_j$」$\}$ $(j=1, 2, \cdots, m)$ 的緣故。但为何对于 $\mathfrak{D}=\bigcup_{j=1}^{m}\mathfrak{D}_j$ 却不假設 $f\overline{\in}(I-F)\{$「$\mathfrak{D}$」$\}$ 呢，原来后者可从前者推証出来。因为「$\mathfrak{D}$」$\subseteq\bigcup_{j=1}^{m}$「$\mathfrak{D}_j$」，从而

$$(I-F)\{「\mathfrak{D}」\}\subseteq(I-F)\left\{\bigcup_{j=1}^{m}「\mathfrak{D}_j」\right\}=\bigcup_{j=1}^{m}(I-F)\{「\mathfrak{D}_j」\}.$$

当然也要假設 $F\{\mathfrak{D}_j\}$ $(j=1, 2, \cdots, m)$ 列紧或 $F\{\mathfrak{D}\}$ 列紧。——譯者注

❷ 为了把参变数 t 明显地表示出来，(3) 可叙述如下：f_t, F_t 关于 t 連續，t 变化时，$f_t\overline{\in}(I-F_t)\{$「$\mathfrak{D}$」$\}$，令 $\bigcup_t F_t\{\mathfrak{D}\}$ 列紧。此时 $d(f_t,\mathfrak{D},I-F_t)$ 与 t 无关。——譯者注

❸ (4) 中 $d(f,\mathfrak{D},I)$ 可以看做为 $F=0$ 的 $d(f,\mathfrak{D},I-F)$，此时 F 連續，$F\{\mathfrak{D}\}$ 列紧，$f\in(I-F)\{$「$\mathfrak{D}$」$\}$ 均得滿足。因而可考慮 $d(f,\mathfrak{D},I)=d(f,\mathfrak{D},I-F)$ 了。——譯者注

映射度。設事先已知在有限維 Euclid 空間的情况下，这一映射度是存在的；至于将这一性质推广到一般 Banach 空間里則是 Leray 与 Schauder 的工作。这一推广的証明将在下一节里介紹，在此应注意到如果定义了映射度，就可以得到 Schauder 型的存在定理。

設 $\mathfrak{D}$ 是凸閉集合，o 是它的一个内点。又令 F 在 $\mathfrak{D}$ 里連續，它的值域 $F\{\mathfrak{D}\}$ 是列緊的且为 $\mathfrak{D}$ 所包含。此时有满足 $f=Ff$ 的 f 存在，可以应用映射度証明如下：

$f=Ff$ 与 $o=(I-F)f$ 是等价的，因此使得 $f=Ff$ 成立的 $f\in\mathfrak{D}$ 存在也就等价于 o 属于 $(I-F)\{\mathfrak{D}\}$. 在此只要考虑 o 不属于 $\mathfrak{D}$ 的边界「$\mathfrak{D}$」的象 $(I-F)\{$「$\mathfrak{D}$」$\}$ 的情况就可以了[1]。在这一情况下，可以定义 $d(o,\ \mathfrak{D},\ I-F)$. 如果它的值不是 0，由 (1) 可知 o 属于 $(I-F)\{\mathfrak{D}\}$. 所以要証明 $d(o,\ \mathfrak{D},\ I-F)$ 不是 0. 今考虑关系到参变数 t 的 $d(o,\ \mathfrak{D},\ I-tF)$. 如果对于 $0\leqslant t\leqslant 1$, o 不属于 $(I-tF)\{$「$\mathfrak{D}$」$\}$，由 (3) 可知 $d(o,\ \mathfrak{D},\ I-tF)$ 是与 t 无关的定值。当 $t=0$ 时，由 (4) 可知其值为 1. 因此就得到 $d(o,\ \mathfrak{D},\ I-F)=1$. 所以我們要証明对于 $0\leqslant t\leqslant 1$, o 不属于 $(I-tF)\{$「$\mathfrak{D}$」$\}$.

由假定，当 $t=0,\ 1$ 时，o 不属于 $(I-F)\{$「$\mathfrak{D}$」$\}$. 所以我們只考虑当 $0<t<1$ 的情况。設 $f\in\mathfrak{D}$, 由假定 $Ff\in\mathfrak{D}$. 因为 o 是 $\mathfrak{D}$ 的内点，所以 o 的充分小的 δ 邻域含于 $\mathfrak{D}$ 内。考虑使得

$$\|tFf-g\|<(1-t)\delta$$

的点 g[2]. g 可以写为

$$g=tFf+(1-t)\cdot(1-t)^{-1}(g-tFf),$$

---

[1] 如果 $o\in(I-F)\{$「$\mathfrak{D}$」$\}$，则由于 $\mathfrak{D}$ 为閉集合，于是「$\mathfrak{D}$」$\subseteq\mathfrak{D}$，从而 $(I-F)\cdot\{$「$\mathfrak{D}$」$\}\subseteq(I-F)\{\mathfrak{D}\}$，因此 $o\in(I-F)\{\mathfrak{D}\}$ 了。——譯者注

[2] $\|tFf-g\|<(1-t)\delta$ 看为 tFf 在范空間 $\mathfrak{E}$ 中的 $(1-t)\delta$ 的邻域，因而这样 g 是存在的。——譯者注

而且 Ff, $(1-t)^{-1}(g-tFf)$❶ 均属于 $\mathfrak{D}$，所以由 $\mathfrak{D}$ 是凸的假定，g 属于 $\mathfrak{D}$。因而 tFf 是 $\mathfrak{D}$ 的内点。从而当 f 是 $\mathfrak{D}$ 的界点时，就不可能有 $f=tFf$❷。这就是說当 $0<t<1$ 时 o 也不属于 $(I-tF)\cdot\{\ulcorner\mathfrak{D}_\lrcorner\}$❸。

上面已假定 o 是 $\mathfrak{D}$ 的内点，但此不失普遍性，因在 $\mathfrak{D}$ 有内点的一般情况下，設其内点之一为 f_0，使 $Ff-f_0$ 对应于 $f-f_0$ 的映射为 G❹。G 的定义域是以 o 为内点的集合

$$\mathfrak{D}'=\{f-f_0;\ f\in\mathfrak{D}\}❺,$$

因为 $f=Ff$ 与 $f-f_0=G(f-f_0)$ 是等价的，故可以考虑用 G 代替 F。

設已知满足 $f=Ff$ 的 $f\in\mathfrak{D}$ 为有限个，而且皆属于 $\mathfrak{D}$ 的内部。又設这些点是 $f_1, f_2, \cdots, f_n$，以 $\mathfrak{U}_j(j=1,2,\cdots,n)$ 表它們各自的 δ 邻域，于是当 δ 充分小时，$\mathfrak{U}_j$ 均含于 $\mathfrak{D}$ 内，而且它們之間沒有公共内点。設 $\mathfrak{D}$ 的不属于任何一个 $\mathfrak{U}_j$ 的点的集合为 $\mathfrak{D}'$，由(2)可知

$$d(o,\mathfrak{D},I-F)=d(o,\mathfrak{D}',I-F)+\sum_{j=1}^{n}d(o,\overline{\mathfrak{U}}_j,I-F) \tag{31.1}$$

---

❶ 又将 $\left\|\frac{tFf-g}{1-t}\right\|<\delta$ 看为 o 的 δ 邻域，它应当 $\subseteq\mathfrak{D}$；所以

$$\frac{-tFf+g}{1-t}\in\mathfrak{D}.$$ ——譯者注

❷ 由于界点，内点不重合。——譯者注

❸ 如不然，$o\in(I-tF)\{\ulcorner\mathfrak{D}_\lrcorner\}$，从而 $\exists f\in\ulcorner\mathfrak{D}_\lrcorner: f=tFf$。——譯者注

❹ G 的变域是 $\mathfrak{D}'=\{f-f_0; f\in D\}$，值域为 $G(\mathfrak{D}')=\{Ff-f_0|f\in D\}$。$G(\mathfrak{D}')$ 列紧，且 G 連續。如任取 $Ff_n-f_0\in G(\mathfrak{D}')$，則 $Ff_n\in F(\mathfrak{D})$，而 $F(\mathfrak{D})$ 列紧，故 $\{Ff_n\}$ 有收斂的子列 $\{Ff_{n_k}\}$，从而 $\{Ff_n-f_0\}$ 也有收斂子列 $\{Ff_{n_k}-f_0\}$；又任取 f_n-f_0，$f-f_0\in\mathfrak{D}'$ 使得 $f_n-f_0\to f-f_0$，則 $f_n\to f$，由于 F 連續，所以 $Ff_n\to Ff$，从而 $Ff_n-f_0\to Ff-f_0$。

至于 $G\{\mathfrak{D}'\}\subseteq\mathfrak{D}'$，$\mathfrak{D}'$ 为凸，閉集合，均可从 $\mathfrak{D}$ 及 $F\{\mathfrak{D}\}$ 的相应的性质推得之。——譯者注

❺ o 为 $\mathfrak{D}'$ 内点。因为 f_0 为 $\mathfrak{D}$ 的内点，故有适当的 δ 邻域 $u(f_0,\delta)\subseteq\mathfrak{D}$，作 $u(o,\delta)$，能証 $u(o,\delta)\subseteq\mathfrak{D}'$ 即可。今任取 $h\in u(o,\delta)$，則 $\|h\|=\|h+f_0-f_0\|<\delta$，于是 $h+f_0\in u(f_0,\delta)$，从而 $h+f_0\in\mathfrak{D}$，因此，$h\in\mathfrak{D}'$，由于 h 之任意性，故 $u(o,\delta)\subseteq\mathfrak{D}'$。——譯者注

成立❶。由于 o 不属于 $(I-F)\{\mathfrak{D}'\}$ ❷，所以(31.1)的右边的第一項是 0。

$$i(f_j,\ I-F)=d(o,\ \overline{\mathfrak{U}}_j,\ I-F)$$

与 δ 无关。这是因为，設 $\delta>\delta'>0$，再設 $\mathfrak{D}_j$ 为 $\overline{\mathfrak{U}}_j$ 的，不属于 f_j 的 δ' 邻域 $\mathfrak{U}'_j$ 的点的集合，則有

$$d(o,\ \overline{\mathfrak{U}}_j,\ I-F)=d(o,\ \mathfrak{D}_j,\ I-F)+d(o,\ \overline{\mathfrak{U}}'_j,\ I-F)$$

成立，因为 o 不属于 $(I-F)\{\mathfrak{D}_j\}$，所以上式右端第一項为 0，从而有

$$d(o,\ \overline{\mathfrak{U}}_j,\ I-F)=d(o,\ \overline{\mathfrak{U}}'_j,\ I-F)$$

成立。$i(f_j, I-F)$ 叫做方程 $f=Ff$ 的根 f_j 的指数。(31.1)就成为

$$d(o,\ \mathfrak{D},\ I-F)=\sum_{j=1}^{n} i(f_j,\ I-F)$$

的形式。这就是說方程 $f=Ff$ 的根为有限个，再若它們都在 $\mathfrak{D}$ 的內部，則 $d(o,\ \mathfrak{D},\ I-F)$ 等于 $\mathfrak{D}$ 內部所有根的指数的和。

§ 32* Leray-Schauder 定理

以有关有限維 Euclid 空間的知識进而証明 Leray-Schauder 定理。

定理 8　設 F 是將范空間 $\mathfrak{E}$ 里的閉集合 $\mathfrak{D}$ 映射到 $\mathfrak{E}$ 里的列緊集合 $F\{\mathfrak{D}\}$ 的連續映射。更設 f 不属于 $\mathfrak{D}$ 的边界「$\mathfrak{D}$」在 $I-F$ 之下的象。在这些前提之下，可以定义一个滿足前节中的条件

---

❶　既然要考慮 $d(o, \mathfrak{D}, I-F)$，$d(o, \mathfrak{D}', I-F)$，$d(o, \overline{\mathfrak{U}}_j, I-F)$，首先应明确以下几件事情：

(1)　$\mathfrak{D}$ 为閉集合——本定理假設；$\overline{\mathfrak{U}}_j$ 为閉集合——閉包的緣故；$\mathfrak{D}'$ 为閉集合——由于 $\bigcup_{j=1}^{n}\mathfrak{U}_j$ 为开集合，及 $\mathfrak{D}$ 为閉集合。

(2)　$F(\mathfrak{D})$ 列緊——本定理假設；至于 $F(\mathfrak{D}')$，$F(\mathfrak{U}_j)$ 列緊皆由于它們作为列緊集合 $F(\mathfrak{D})$ 的子集合的緣故。

(3)　$o\notin(I-F)\{「\mathfrak{D}」\}$，$\notin(I-F)\{「\mathfrak{D}'」\}$，$\notin(I-F)\{「\overline{\mathfrak{U}}_j」\}$。

如不然，就有使得 $f=Ff$ 成立的 f，而它 $\in「\mathfrak{D}」$，或「$\mathfrak{D}'$」，或「$\overline{\mathfrak{U}}_j$」——此为不可能，因为这样 f 全部即 $\{f_1, \cdots, f_n\}$，而它們却各在 $\mathfrak{U}_1, \cdots, \mathfrak{U}_n$ 之中。——譯者注

❷　$o\notin I-F\{\mathfrak{D}'\}$，不然將有使得 $f=Ff$ 的 $f\in\mathfrak{D}'$ 了。——譯者注

(1), (2), (3), (4) 的整数值 $d(f, \mathfrak{D}, I-F)$.

首先应注意下述事实：存在若正数 $\delta>0$ 使得对于所有 $g\in\ulcorner\mathfrak{D}\lrcorner$ 成立

$$\|g-Fg-f\|\geqslant\delta>0. \tag{32.1}$$

假如这样的正数 δ 不存在，则可从 $\ulcorner\mathfrak{D}\lrcorner$ 取出使 $\|g_k-Fg_k-f\|\to0$ 的点列 $\{g_k\}$. 因为 $\{Fg_k\}$ 是从列紧集合 $F\{\mathfrak{D}\}$ 所取出的点列，故可以再从它取出一个收斂的子列。从而一开始就假定 $\{Fg_k\}$ 收斂，这样做，也并不失去論証的一般性。設它的极限点为 $g-f$，則由

$$\|g_k-g\|\leqslant\|g_k-Fg_k-f\|+\|Fg_k-g+f\|$$

可以得到 $\|g_k-g\|\to0$，也就是 $g_k\to g$. 又因为 $\{g_k\}$ 是 $\mathfrak{D}$ 的界点所构成的点列，所以它的极限点 g 也是 $\mathfrak{D}$ 的界点。由于 $\mathfrak{D}$ 是閉集合，所以 g 属于 $\mathfrak{D}$. 从而由 $\|g_k-Fg_k-f\|\to0$ 就得到 $g-Fg=f$，这一結果与 f 不属于 $(I-F)\{\ulcorner\mathfrak{D}\lrcorner\}$ 的假定相矛盾。

因为 $F\{\mathfrak{D}\}$ 是列紧的，所以由定理5❶ 可知，对于所有 $g\in F\{\mathfrak{D}\}$, $\|Tg-g\|<\delta$ 成立，而其值域含于有限維子空間 $\mathfrak{E}'$，且以 $F\{\mathfrak{D}\}$ 为其变域的这样一个連續映射 T 是存在的。

設 $\mathfrak{E}'$ 含有 f. 如果不是这样的时候，可以考慮由 $\mathfrak{E}'$ 的点与 f 的綫性組合所构成的只比 $\mathfrak{E}'$ 高一維的子空間，用以代替 $\mathfrak{E}'$. 依同样的理由可以假定 $\mathfrak{E}'$ 至少含有 $\mathfrak{D}$ 的一个点。

可以认为 TF 是以 $\mathfrak{E}'\cap\mathfrak{D}$ 为变域的連續映射。此时值域含于 $\mathfrak{E}'$. 若 $\mathfrak{E}'\cap\mathfrak{D}$ 的边界 $\ulcorner\mathfrak{E}'\cap\mathfrak{D}\lrcorner_{\mathfrak{E}'}$ 在 $I-TF$ 之下的象作为 $\mathfrak{E}'$ 里的一个集合而不含有 f 时，由于所考慮的是有限維空間的情况，故可以定义 $d(f, \mathfrak{E}'\cap\mathfrak{D}, I-TF)$. 把它作为 $d(f, \mathfrak{D}, I-F)$ 的定义。这就是説

$$d(f, \mathfrak{D}, I-F)=d(f, \mathfrak{E}'\cap\mathfrak{D}, I-TF). \tag{32.2}$$

❶ 将此处 $F\{\mathfrak{D}\}$，以及 $\mathfrak{E}'$ 分别看做定理5中的 $\mathfrak{F}$ 与 $\mathfrak{K}$ 就可以了。——譯者注

今先証明 f 不属于 $(I-TF)\{$「$\mathfrak{E}'\cap\mathfrak{D}$」$_{\mathfrak{E}'}\}$. 在属于「$\mathfrak{E}'\cap\mathfrak{D}$」$_{\mathfrak{E}'}$ 的点的任意邻域里有属于 $\mathfrak{E}'\cap\mathfrak{D}$ 的点(这些点属于 $\mathfrak{D}$),也有 $\mathfrak{E}'$ 的不属于 $\mathfrak{E}'\cap\mathfrak{D}$ 的点 (这些点不属于 $\mathfrak{D}$), 因而「$\mathfrak{E}'\cap\mathfrak{D}$」$_{\mathfrak{E}'}$ 的点是 $\mathfrak{D}$ 的界点, 也就是說「$\mathfrak{E}'\cap\mathfrak{D}$」$_{\mathfrak{E}'}$ 含于「$\mathfrak{D}$」内。設取属于「$\mathfrak{E}'\cap\mathfrak{D}$」$_{\mathfrak{E}'}$ 的任意一点 g, 由于 g 属于「$\mathfrak{D}$」, 所以(32.1)成立。

$$\|(I-TF)g-f\|\geqslant\|(I-F)g-f\|-\|Fg-TFg\|,$$

并且这一不等式的右端前一项 $\geqslant\delta$, 而后一项由 T 的定义又小于 δ, 因此不等式的右端确乎是正的。故 $(I-TF)g$ 不等于 f. 于是可知「$\mathfrak{E}'\cap\mathfrak{D}$」$_{\mathfrak{E}'}$ 在 $I-TF$ 之下的象不含有 f.

其次要說明 (32.2) 的右端与 T 的取法无关。为此設 T' 是滿足同于 T 的条件的映射,并設它所对应的有限維子空間为 $\mathfrak{E}''$. 先考虑 $\mathfrak{E}'=\mathfrak{E}''$ 的情況,如果令

$$T_t=tT'+(1-t)T,$$

則当 $0\leqslant t\leqslant 1$ 时,对于 $g\in F\{\mathfrak{D}\}$, 有

$$\|T_tg-g\|\leqslant t\|T'g-g\|+(1-t)\|Tg-g\|<\delta,$$

是以 T_t 与 T 滿足同样的条件,所以「$\mathfrak{E}'\cap\mathfrak{D}$」$_{\mathfrak{E}'}$ 在 $I-T_tF$ 之下的象不含有 f. 从而❶在 $0\leqslant t\leqslant 1$ 内 $d(f,\ \mathfrak{E}'\cap\mathfrak{D},\ I-T_tF)$ 保持定値。由于可令 $t=0,\ 1$, 故当 $\mathfrak{E}'=\mathfrak{E}''$ 时就得到

$$d(f,\ \mathfrak{E}'\cap\mathfrak{D},\ I-TF)=d(f,\ \mathfrak{E}''\cap\mathfrak{D},\ I-T'F). \tag{32.3}$$

当 $\mathfrak{E}'\neq\mathfrak{E}''$ 时, 取含有 $\mathfrak{E}'$, $\mathfrak{E}''$ 两方的有限維子空間 $\mathfrak{F}$. 則

$$d(f,\ \mathfrak{F}\cap\mathfrak{D},\ I-TF)=d(f,\ \mathfrak{F}\cap\mathfrak{D},\ I-T'F)❷,$$

可以証明这一等式两端分别等于 (32.3) 的两端。左端与左端,右

---

❶ 尚須証明 $\bigcup_t T_t\{F\{\mathfrak{D}\}\}$ 列紧。事实上, 任取 $T_{t_n}f_n\in\bigcup_t T_t\{F\{\mathfrak{D}\}\}$, 則

$$T_{t_n}f_n=t_nT'f_n+(1-t_n)Tf_n,$$

而 $\{T'f_n\}$, $\{Tf_n\}$, $\{t_n\}$ 列紧,从而 $T_{t_n}f_n$ 列紧。——譯者注

❷ $TF\{\mathfrak{F}\cap\mathfrak{D}\}$ 列紧,因为 $\mathfrak{F}\cap\mathfrak{D}\subseteq\mathfrak{D}$, 故 $TF\{\mathfrak{F}\cap\mathfrak{D}\}\subseteq TF\{\mathfrak{D}\}\subseteq\mathfrak{E}'$, 而 $\mathfrak{E}'$ 依 §29, 定理5, 注意2为有界閉集合是以列紧,于是 $TF\{\mathfrak{F}\cap\mathfrak{D}\}$ 列紧。

"$f\bar{\in}(I-TF)\{$「$\mathfrak{F}\cap\mathfrak{D}$」$_{\mathfrak{F}}\}$"其理由同上"$f\bar{\in}(I-TF)\{$「$\mathfrak{E}'\cap\mathfrak{D}$」$_{\mathfrak{E}'}\}$".——譯者注

端与右端相比較时，可知映射是相同的，而且两个有限維子空間的一方含有另一方。因此，現在可以設 $\mathfrak{E}'\subset\mathfrak{E}''$，$T=T''$ 进而証明 (32.3) 在現在的情況下也能成立。

已經知道 $\mathfrak{E}$ 在有限維 Euclid 空間的情况下，有一个关于映射度的性质如下：

(5) 設 $\mathfrak{E}'$ 是范空間 $\mathfrak{E}$ 的閉的子空間，$\mathfrak{D}$ 是 $\mathfrak{E}$ 里的閉集合，F 是以 $\mathfrak{D}$ 为其变域而其值域为 $\mathfrak{E}$ 里的列緊集合的一个連續映射。如果当 $f\in\mathfrak{D}$ 时就有 $Ff\in\mathfrak{E}'$，則对于 $\mathfrak{E}'$ 的不属于 $\mathfrak{D}$ 的边界「$\mathfrak{D}$」在 $I-F$ 之下的象的点 f 来說下式成立：

$$d(f,\ \mathfrak{D}\cap\mathfrak{E}',\ I-F)=d(f,\ \mathfrak{D},\ I-F).$$

現在特来考察，設 $\mathfrak{E}=\mathfrak{E}''$ 而且取 TF 作为映射 F 的情况。由于在 $f\in\mathfrak{D}$ 时有 $TFf\in\mathfrak{E}'$，而且 $\mathfrak{E}''$ 是有限維的，所以由性质 (5)，(32.3) 在 $\mathfrak{E}'\subset\mathfrak{E}''$，$T=T''$ 时是成立的❶。

---

❶ (5) 可表述如下：

① 有限維 Euclid 空間 $\mathfrak{E}\supseteq$ 閉集合 $\mathfrak{D}\ \xrightarrow[\text{連續}]{F}$ 列緊 $F(\mathfrak{D})\subseteq$ 閉子空間 $\mathfrak{E}'\subseteq\mathfrak{E}$.
当 $f\in\mathfrak{E}'-(I-F)\{「\mathfrak{D}」\}$，則 $d(f,\ \mathfrak{D}\cap\mathfrak{E}',\ I-F)=d(f,\ \mathfrak{D},\ I-F)$.

而按以上論述，有范空間

$\mathfrak{E}\supseteq$ 閉集合 $\mathfrak{D}\ \xrightarrow[\text{連續}]{F}$ 列緊 $F(\mathfrak{D})\ \xrightarrow[\text{連續}]{T}\ TF(\mathfrak{D})\subseteq$ 閉有限維子空間 $\mathfrak{E}'\subseteq\mathfrak{E}$.

从而有限維子空間 $\mathfrak{E}'\supseteq$ 閉集合 $\mathfrak{D}\cap\mathfrak{E}'\ \xrightarrow[\text{連續}]{TF}$ 列紧 $TF(\mathfrak{D})\subseteq$ 有限維子空間 $\mathfrak{E}'$.
对于与 T'（現在令它 $=T$）相对应的有限維子空間 $\mathfrak{E}''$，在 $\mathfrak{E}''\supseteq\mathfrak{E}'$ 条件下，有

② 有限維空間

$\mathfrak{E}''\supseteq$ 閉集合 $\mathfrak{D}\mathfrak{E}''\ \xrightarrow[\text{連續}]{TF}$ 列紧 $TF\{\mathfrak{D}\mathfrak{E}''\}\subseteq$ 有限維閉子空間 $\mathfrak{E}'\subseteq\mathfrak{E}''$.

今將②中 $\mathfrak{E}''$，$\mathfrak{D}\mathfrak{E}''$，$TF$，分别看做①中 $\mathfrak{E}$，$\mathfrak{D}$，F. 再由于此

$f\in\mathfrak{E}'-(I-TF)\{「\mathfrak{D}\mathfrak{E}''」\}$——上已証明——故得依(5)而有

$$d(f,\ \mathfrak{D}\mathfrak{E}''\mathfrak{E}',\ I-TF)=d(f,\ \mathfrak{D}\mathfrak{E}'',\ I-TF),$$

但 $\mathfrak{E}''\supseteq\mathfrak{E}'$，所以 $d(f,\ \mathfrak{D}\mathfrak{E}',\ I-TF)=d(f,\ \mathfrak{D}\mathfrak{E}'',\ I-TF)$. 將 $\mathfrak{E}''$ 易为 $\mathfrak{F}$，于是由此可得 $d(f,\ \mathfrak{D}\mathfrak{E}',\ I-TF)=d(f,\ \mathfrak{D}\mathfrak{F},\ I-TF)$. 类似地可証

$$d(f,\ \mathfrak{D}\mathfrak{E}'',I-T''F)=d(f,\ \mathfrak{D}\mathfrak{F},\ I-T'F).$$

「此时并不限定 $T'=T$」故从 $d(f,\ \mathfrak{D}\mathfrak{F},\ I-TF)=d(f,\ \mathfrak{D}\mathfrak{F},\ I-T'F)$ [已証] 推出 $d(f,\ \mathfrak{D}\mathfrak{E}',\ I-TF)=d(f,\ \mathfrak{E}''\mathfrak{D},\ I-T'F)$.——譯者注

以上所述与映射度的定义无矛盾，但要更进一步論証以上所述是否满足对映射度所要求的性质。

1. 設 f 不属于 $(I-F)\{\mathfrak{D}\}$. 在这一情况下，对于所有 $g\in\mathfrak{D}$，存在着满足

$$\|g-Fg-f\|\geqslant\delta'>0 \tag{32.4}$$

的正数 δ'. 如果不是这样的話，可以从 $\mathfrak{D}$ 取出适当的点列 $\{g_k\}$ 使得 $\|g_k-Fg_k-f\|\to 0$. 由于可以从 $\{Fg_k\}$ 取出一个收敛的子列，所以一开始就假定 $\{Fg_k\}$ 是收斂的，而这样做并不失去論証的一般性。如果将 $\{Fg_k\}$ 的极限点写成 $g-f$，就有

$$\|g_k-g\|\leqslant\|g_k-Fg_k-f\|+\|Fg_k-g+f\|,$$

因而 $\|g_k-g\|\to 0$ 即 $g_k\to g$. 由于 $\mathfrak{D}$ 是閉集合，所以 g 属于 $\mathfrak{D}$. 由 $\|g_k-Fg_k-f\|\to 0$ 就得到

$$g-Fg=f.$$

这就表明了 f 是属于 $(I-F)\{\mathfrak{D}\}$ 的，然而这一論証与最初的假定矛盾。

特别地，取映射 T 使得对于所有 $g\in\mathfrak{D}$

$$\|TFg-Fg\|<\delta', \tag{32.5}$$

则对所有 $g\in\mathfrak{D}$ 就有

$$\|(I-TF)g-f\|\geqslant\|g-Fg-f\|-\|Fg-TFg\|>0, \tag{32.6}$$

因而 f 不属于 $(I-TF)\{\mathfrak{D}\}$. 于是

$$d(f,\ \mathfrak{E}'\cap\mathfrak{D},\ I-TF)=0.$$

上式左端，依定义，等于 $d(f,\ \mathfrak{D},\ I-F)$，因此

$$d(f,\ \mathfrak{D},\ I-F)=0.$$

2. 設 $\mathfrak{D}_j\ (j=1,\ 2,\ \cdots,\ m)$ 是相互之間沒有公共內点的閉集合，$\mathfrak{D}$ 是它們的并集合。在这一情况下，可以取一个对属于 $[\mathfrak{D}_j]\ (j=1,\ 2,\ \cdots,\ m)$ 的每一个点 g 来說使(32.4)成立的 $\delta'>0$. 再取一个对于一切 $g\in\mathfrak{D}_j$ 使(32.5)成立的 T. 此时有下列等式

$$d(f,\ \mathfrak{C}'\cap\mathfrak{D}_j,\ I-TF)=d(f,\ \mathfrak{D}_j,\ I-F), \qquad (32.7)$$

$$d(f,\ \mathfrak{C}'\cap\mathfrak{D},\ I-TF)=d(f,\ \mathfrak{D},\ I-F) \qquad (32.8)$$

成立。(32.7)的左端之和等于 (32.8) 的左端，因而得到了要証明的結果。

3. 設 f, F 連續地关系到参变数 t——t 的变域設为 $0\leqslant t\leqslant 1$——而且 f 决不属于「$\mathfrak{D}$」在 $I-F$ 之下的象。更設变化 t 而得到的集合 $F\{\mathfrak{D}\}$ 的并集合 $\mathfrak{C}$ 是列紧的。显然对于 t 的固定的值 $F\{\mathfrak{D}\}$ 是 $\mathfrak{C}$ 的子集，所以它也是列紧的，而且对于 $g\in$「$\mathfrak{D}$」存在着使 (32.1) 成立的 δ. 而 δ 的选取与 t 无关，証明这一論断可用归謬証法，即視其否定理是不是成立就可以了。

为了把 F, f 关系到 t 的这件事表示出来，把它們写成 F_t, f_t，于是必有満足 $0\leqslant t_k\leqslant 1$ 的数列 $\{t_k\}$ 与从「$\mathfrak{D}$」取出适当的点列 $\{g_k\}$，使得

$$\|g_k-F_{t_k}g_k-f_{t_k}\|\to 0 \text{❶}. \qquad (32.9)$$

因为 $\{F_{t_k}g_k\}$ 是从 $\mathfrak{C}$ 取出的点列，所以从 $\{F_{t_k}g_k\}$ 可以取出一个收斂的子列。因此一开始就可以假定 $\{F_{t_k}g_k\}$ 是收斂的。并且从 $\{t_k\}$ 也可以取出一个收斂的子列，因而也可以假定 $\{t_k\}$ 是收斂的，这样作并不失去論証的一般性。設 $\{t_k\}$ 的极限值是 t，則 $f_{t_k}\to f_t$❷. 如果把 $\{F_{t_k}g_k\}$ 的极限值写为 $g-f_t$，就有

$$\|g_k-g\|\leqslant\|g_k-F_{t_k}g_k-f_{t_k}\|+\|F_{t_k}g_k-g+f_t\|+\|f_{t_k}-f_t\|,$$

因而 $g_k\to g$，从而进一步由 (32.9) 得到 $g-F_tg=f_t$❸，这样一来，f_t 属于「$\mathfrak{D}$」在 $I-F_t$ 之下的象❹，这就与假定矛盾了。

---

❶ 这是由于将"δ 的选取与 t 无关"否定的結果。——譯者注

❷ 由于 f_t 关于 t 連續。——譯者注

❸ 尙須借助于 $F_{t_k}g_k\to F_tg$，但它由于 F_t 連續于 $\mathfrak{D}$ 以及 F_t 关于 t 連續的假設甚易从 $\|F_{t_k}g_k-F_tg\|\leqslant\|F_{t_k}g_k-F_{t_k}g\|+\|F_{t_k}g-F_tg\|$ 推証出来。——譯者注

❹ 注意 $g\in$「$\mathfrak{D}$」，这是由于 $g_k\in$「$\mathfrak{D}$」，$g_k\to g$，以及「$\mathfrak{D}$」为閉集合的緣故。——譯者注

因为 $\mathfrak{C}$ 是列紧的，所以可取满足对于 $g\in\mathfrak{C}$ 且 $\|Tg-g\|<\delta/2$ 并值域为含于有限維子空間❶的映射为 T. 由于 f_t 是連續的，可以选取适当的 $t_1, t_2, \cdots, t_{n-1}$ 使得 $0=t_0<t_1<t_2<\cdots<t_{n-1}<t_n=1$，并在 $t_{r-1}\leqslant t\leqslant t_r$ 内有 $\|f_t-f_{t_r}\|<\delta/2$, $\|f_t-f_{t_{r-1}}\|<\delta/2$. 如果 $\mathfrak{C}'$ 不含有 $f_{t_0}, f_{t_1}, \cdots, f_{t_n}$，可以考虑由 $\mathfrak{C}'$ 的点与 $f_{t_0}, f_{t_1}, \cdots, f_{t_n}$ 的綫性組合所构成的子空間用以代 $\mathfrak{C}'$，因此可以假定 $\mathfrak{C}'$ 含有 $f_{t_0}, f_{t_1}, \cdots, f_{t_n}$. 在 $t_{r-1}\leqslant t\leqslant t_r$ 内，命

$$f'_t=\frac{t_r-t}{t_r-t_{r-1}}f_{t_{r-1}}+\frac{t-t_{r-1}}{t_r-t_{r-1}}f_{t_r},$$

则 f'_t 在 $0\leqslant t\leqslant 1$ 内被定义，并且作为 t 的連續函数，含于 $\mathfrak{C}'$ 内。由于满足关系

$$f'_t-f_t=\frac{t_r-t}{t_r-t_{r-1}}(f_{t_{r-1}}-f_t)+\frac{t-t_{r-1}}{t_r-t_{r-1}}(f_{t_r}-f_t),$$

于是 $\|f'_t-f_t\|<\delta/2$ 得以成立。

对于所有 $g\in\ulcorner\mathfrak{D}\lrcorner$，既有

$$\|g-F_tg-f'_t\|\geqslant\|g-F_tg-f_t\|-\|f_t-f'_t\|>\delta/2,$$

因而有

$$d(f'_t, \mathfrak{D}, I-F_t)=d(f'_t, \mathfrak{C}'\cap\mathfrak{D}, I-TF_t)❷.$$

上式右端具有与 t 无关之值。所以 $d(f_{t_r}, \mathfrak{D}, I-F_{t_r})$ $(r=0, 1, \cdots, n)$ 都取同一值。在区間 $0<t<1$ 内总可以任取 $t_1, t_2, \cdots, t_{n-1}$ 之值，于是可知性质(3)也得到满足。

4. 在考虑恒等映射时，$F=0$，这就是說 F 是使所有 f 对应于 $o=Ff$ 的映射。在这一情况下可以取 $T=0$. 今取 $\mathfrak{C}'$ 为含有 f 与 $\mathfrak{D}$ 的点的有限維子空間。如果 f 是 $\mathfrak{D}$ 的内点，则当把 $\mathfrak{C}'\cap\mathfrak{D}$ 看做是 $\mathfrak{C}'$ 里的集合时，f 仍是 $\mathfrak{C}'\cap\mathfrak{D}$ 的内点。如果 f 是 $\mathfrak{D}$ 的外点，当把 $\mathfrak{C}'\cap\mathfrak{D}$ 看成是 $\mathfrak{C}'$ 里的集合时，f 也仍是 $\mathfrak{C}'\cap\mathfrak{D}$ 的外点。

---

❶ 即下文中 $\mathfrak{C}'$. ——譯者注

❷ 依(32.2)。——譯者注

所以当 f 是 $\mathfrak{D}$ 的内点时 $d(f, \mathfrak{C}'\cap\mathfrak{D}, I)$ 是 1，当 f 是 $\mathfrak{D}$ 的外点时 $d(f, \mathfrak{C}'\cap\mathfrak{D}, I)$ 是 0．这样的值等于 $d(f, \mathfrak{D}, I)$，所以性质 (4) 也确实得到满足。

附录　映射度的定义

在本书中，把有限維 Euclid 空間的理論是作为已知来叙述的。这些理論的严密的論述需要較長的篇幅，因此，在这里只对所談过的具有重要性质的映射度在特殊的二維空間里的定义做一个簡单的說明。显然，在 n 維空間的情况下可依同样的方法对映射度給予定义。

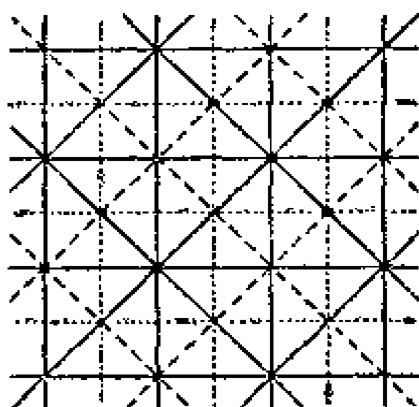


图 1

(a) 先将全平面如图 1 实綫所示分割成彼此全同的二等边直角三角形，把这样的三角形❶表示为 $D_k^0(k=1,2,\cdots)$．再如图 1 虚綫所示，把所有 D_k^0 都分割为彼此全同的两个直角三角形，把这样得到的三角形表示为 $D_k^1(k=1, 2, \cdots)$．再次用点綫将所有 D_k^1 都分割为全同的直角三角形，把所得到的三角形表示为 $D_k^2(k=1, 2, \cdots)$．經过这样两次分割，得到了与最初所得图形相似的图形，对于它仍用与前相同的方法再一次进行分割。这次得到的三角形記为 $D_k^3(k=1,2,\cdots)$．一般說把第 n 次分割所得三角形表示为 $D_k^n(k=1, 2, \cdots)$．D_k^n 都是彼此全同的二等边直角三角形，其面积是 D_k^0 的 2^{-n} 倍。我們要以这样的平面分割为基础来考虑問題。

(b) 設連續映射 $T=I-F$ 的变域 E 是有界閉域❷。設三角形 D_k^n 含于 E 內，且其頂点为 A_k^n, B_k^n, C_k^n，再設这些点在 T 之下的象为 $\bar{A}_k^n=TA_k^n$, $\bar{B}_k^n=TB_k^n$, $\bar{C}_k^n=TC_k^n$，并且以这些象点为頂点的三角形为 Δ_k^n．为了方便依 A_k^n, B_k^n, C_k^n 的順序繞 D_k^n 轉一周时，若 D_k^n 的內部在左手一边，就附上一个符号。依 $\bar{A}_k^n$、$\bar{B}_k^n$, $\bar{C}_k^n$ 的順序繞 Δ_k^n 轉一周时，若 Δ_k^n 的內部在左手一边則定义 $\operatorname{sgn}\Delta_k^n=1$，若其內部在右手一边，則定义 $\operatorname{sgn}\Delta_k^n=-1$．可能有如下的特殊情况出現，即 $\bar{A}_k^n$, $\bar{B}_k^n$, $\bar{C}_k^n$ 在同一直綫上，这时这三点就不能决定一个三角形了。在这一情况下定义 $\operatorname{sgn}\Delta_k^n=0$．当在 P 不属于 Δ_k^n 的情况下，定义

$$\operatorname{sgn}(P, \Delta_k^n)=0.$$

❶ 所謂三角形是指由其周界及其內部所构成的閉域而言。——原书注

❷ 不是有界的也可以，为叙述方便而作此假定。——原书注

当 P 在 Δ_k^n 的内部的情况下,定义

$$\operatorname{sgn}(P, \Delta_k^n)=\operatorname{sgn}\Delta_k^n.$$

当P在 Δ_k^n 的边上时❶,定义

$$\operatorname{sgn}(P, \Delta_k^n)=\frac{1}{2}\operatorname{sgn}\Delta_k^n.$$

将 n 固定,对于所有含于 E 的 D_k^n 作和

$$d_n=\sum_k \operatorname{sgn}(P, \Delta_k^n) \quad (D_k^n\subset E), \tag{1}$$

它就是把 P 复盖的 Δ_k^n 的代数的个数。

如果 P 不属于 E 的界「E」的象,则当 n 充分大时,d_n 趋于定值。这一值叫做 E 于 P 点在 T 之下的映射度,記为

$$d(P, E, T)=\lim d_n. \tag{2}$$

(c) 此时从 P 到 $T\{「E」\}$ 的距离为正的❷。取 ε 使小于这一距离。我們可取充分小之 $\delta>0$,使得当每个 $Q\in E$ 而 Q 与「E」的距离小于 δ,則 TQ 与 P 之距离将大于 ε❸. 甚至必要时可使 δ 更小,以致当属于 E 的两点 Q, Q' 的距离比 δ 小时,TQ, TQ' 的距离可以比 ε 小❹。

今設 n 取得充分大而 D_k^n 的边长都比 δ 小。此时可以知道 $d_n=d_{n+1}$,因而(2)式的右端确实是有意义的。

先考虑这样的 D_k^n,它含有与「E」的距离大过等于 δ 的,E 的点 Q,由于 Q 与 D_k^n 的点的距离比 δ 小,D_k^n 完全为 E 所包含❺。因此,当設为 E 所包含

---

❶ 不考虑 P 是 D_k^n 的项点的象的情况。——原书注

❷ 从 P 到 $T\{「E」\}$ 之距离 $\rho(P, T\{「E」\})>0$. 如不然,依其定义

$$\rho(P, T\{「E」\})=\inf\{\rho(P, TQ), Q\in「E」\}=0,$$

此处 $\rho(P, TQ)$ 表示平面点P与点TQ的距离,于是 $\exists TQ_n (n=1,2,\cdots)$ 使得 $\lim\limits_n \rho(P, TQ_n)=0$, 即得 $TQ_n\to P$. 由于「E」是閉集合有界,故 $\exists$ 点 $Q\in「E」$ 使得 $Q_{n_k}\to Q$, 而 T 連續于「E」, 故 $TQ_{n_k}\to TQ$, 因之, $P=TQ\in T\{「E」\}$, 此与假設矛盾。——譯者注

❸ 由于 $\rho(P, T\{「E」\})>\varepsilon$, 故可取 $0<\eta<\rho(P, T\{「E」\})-\varepsilon$. 由于 T 連續于 E, 而 E 为有界閉集合,故必一致連續,因此,对于 $\eta>0$, 必有$\delta>0$:当$Q, Q'\in E$ $\rho(Q,Q')<\delta$, 則 $\rho(TQ, TQ')<\eta$. 此 $\delta>0$ 卽合所求,如任取 $Q\in E$ 而 $\rho(Q, 「E」)<\delta$, 于是 $\exists$ $Q'\in「E」$ 使得 $\rho(Q, Q')<\delta$, 再依 $\delta>0$ 所滿足条件 $\rho(TQ, TQ')<\eta$; 但

$$\rho(TQ, P)+\rho(TQ, TQ')\geqslant\rho(P, TQ'),$$

故

$$\rho(TQ, P)+\eta\geqslant\rho(P, T\{「E」\}),$$

从而

$$\rho(TQ, P)>\rho(P, T\{「E」\})-\eta>\varepsilon. \text{——譯者注}$$

❹ 这是 TQ 于 E 一致連續之意。——譯者注

❺ $D_k^n\subseteq E$; 如不然, D_k^n 含有「E」的点 Q', 于是就引出一方面 $\rho(Q, Q')\geqslant\delta$, 另一方面 $\rho(Q, Q')<\delta$, 这样矛盾了。——譯者注

的 D_k^n 的并集合为 D^n 时，则 E 的不属于 D^n 的点与「E」的距离小于 δ. 設 D_k^{n+1} 含于 E 而不含于 D^n，则 D_k^{n+1} 的頂点的象 $\bar{A}_k^{n+1}$, $\bar{B}_k^{n+1}$, $\bar{C}_k^{n+1}$ 与 P 的距离不比 ε 小❶。但它們之間的距离比 ε 小，故 P 必不属于 Δ_k^{n+1}. 由此可知 $\operatorname{sgn}(P, \Delta_k^{n+1})=0$. 所以 d_{n+1} 等于含于 D^n 的 D_k^{n+1} 的 $\operatorname{sgn}(P, \Delta_k^{n+1})$ 的和：

$$d_{n+1}=\sum_k \operatorname{sgn}(P, \Delta_k^{n+1}) \quad (D_k^{n+1}\subset D^n). \tag{3}$$

现在来考虑含于 D^n 的一个 D_k^n. 設它又被分割为两个三角形 D_k^{n+1}, D_{k+1}^{n+1}. 如果 D_k^n 的斜边不在 D^n 的边上，则与之共有这一斜边的三角形——設它为 D_{k+1}^n——为 D^n 所包含。并且它也被分为两个三角形。設这两个三角形是 D_{k+2}^{n+1}, D_{k+3}^{n+1}. 如果 Δ_k^n, Δ_{k+1}^n 形成三角形，则有

$$\operatorname{sgn}(P, \Delta_k^n)+\operatorname{sgn}(P, \Delta_{k+1}^n)=\sum_{r=k}^{k+3}\operatorname{sgn}(P, \Delta_r^{n+1}) \tag{4}$$

成立。例如图 3 所表示的那样，若設 $B_k^nC_k^n$ 的中点 Q 的象为 $\bar{Q}$，则只有 $\operatorname{sgn}\Delta_k^{n+1}$ 是 -1，而 $\operatorname{sgn}\Delta_{k+1}^{n+1}$, $\operatorname{sgn}\Delta_{k+2}^{n+1}$, $\operatorname{sgn}\Delta_{k+3}^{n+1}$ 都是 1. 从而(4)式的两端恒相等。如果 P 在四边形 $\bar{A}_k^n\bar{B}_k^n\bar{A}_{k+1}^n\bar{C}_k^n$ 的内部，两端等于 1; P 在該四边形边上，两端等于 1/2, P 在該四边形外部，两端等于 0❷.

不論 A_k^n, B_k^n, C_k^n, A_{k+1}^n 与 Q 的象排列的位置如何，都可得同样的結果。

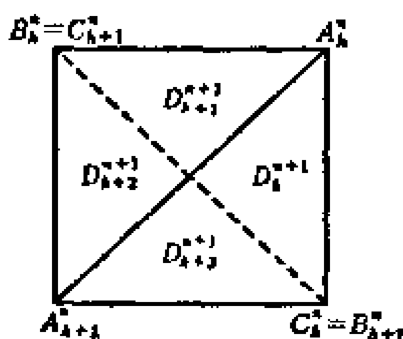


图 2

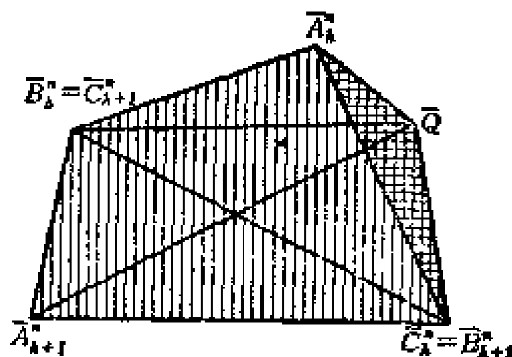


图 3

其次我們考虑 D_k^n 的斜边 $B_k^nC_k^n$ 含于 D^n 的周界的情況。此时 $\bar{B}_k^n$, $\bar{C}_k^n$ 到 P 的距离不比 ε 小❸。然而 $\bar{A}_k^n$, $\bar{B}_k^n$, $\bar{C}_k^n$ 相互間的距离比 ε 小，因此 P 不被

---

❶ $D_k^{n+1}\subseteq E$ 而 $\not\subset D^n$，則在注意到这些 D_k^n 以及 D^n 之图形結构之后，可知此 D_k^{n+1} 內部 $\subseteq E-D^n$，于是对于其任一頂点例如 A_k^{n+1} 必有 $Q_i\in E-D^n$ $(i=1, 2, \cdots)$，使得 $Q_i\to A_k^n$，而 T 連續于 E，故 $TQ_i\to TA_k^n$. 但依前句話的論断，以及 $\delta>0$ 所滿足之条件 $\rho(TQ_i, P)>\varepsilon$，于是 $\rho(TA_k^n, P)$ 即 $\rho(\bar{A}_k^n, P)\geqslant\varepsilon$.——譯者注

❷ Δ_k^{n+1} 即图 3 横綫所示之处，而 Δ_{k+1}^{n+1}, Δ_{k+2}^{n+1}, Δ_{k+3}^{n+1} 即纵綫所示之处。——原书注

❸ 参考上注❶。——譯者注

Δ_k^n 所包含。同样 P 也不被 Δ_k^{n+1}, Δ_{k+1}^{n+1} 的任何一个所包含，因此

$$\operatorname{sgn}(P, \Delta_k^n) = \operatorname{sgn}(P, \Delta_k^{n+1}) + \operatorname{sgn}(P, \Delta_{k+1}^{n+1}) \tag{5}$$

的两端都是 0。

对于斜边含于 D^n 的 D_k^n，在与 D_k^n 共有这一斜边的三角形存在的情况下(4)式成立，在斜边在 D^n 的周界上的情况下(5)式成立，因而可知(3)的右端是关于 D^n 所含的 D_k^n 的 $\operatorname{sgn}(P, \Delta_k^n)$ 的和，也就是說 d_{n+1} 等于 d_n。

(d) 考察一下对于映射度所要求的性质(1)，(2)，(3)，(4)。

(1) 如果 P 不属于 $T\{E\}$，从 P 到 $T\{E\}$ 的距离是正的。取比这一距离小的 $\varepsilon>0$，对于它取 $\delta>0$ 使得当属于 E 的两点 Q, Q' 的距离比 δ 小时 TQ, TQ' 的距离就比 ε 小。設当 n 取得充分大时，D_k^n 的边长比 δ 小。含于 E 的 D_k^n 的頂点的象 $\overline{A}_k^n$, $\overline{B}_k^n$, $\overline{C}_k^n$ 相互間的距离比 ε 小，而且与 P 的距离大于 ε，因而 P 不属于 Δ_k^n. 从而 $\operatorname{sgn}(P, \Delta_k^n)=0$，随之 (1) 式的右端各項都是 0，因而有 $d(P, E, T)=0$。

(2) 設 E 是閉集合 E^1, E^2, $\cdots$, E^m 的并集，P 不属于「E」的象，也不属于 $E^j\cap E^k(j\neq k)$ 的任何一个的象[1]。

由于从 P 到 $T\{「E」\}$ 的距离，和到 $T\{E^j\cap E^k\}$ 的距离都是正的，可以取比这两个距离都小的 $\varepsilon>0$. 如果 $\delta>0$ 取得充分小，可以使一方面与「E」和另一方面与 $E^j\cap E^k(j\neq k: j, k=1, 2, \cdots, m)$ 的并集 S 的距离都小于 δ 的这样的点，它的象和 P 的距离比 ε 大。如果必要还可以把 δ 取得更小，使得 E 的相互的距离比 δ 小的点的象之間有比 ε 小的距离。对于这样的 δ 用前面的方法可取得充分大的 n[2]。

对于含于 E 的，以与 S 的距离至大是 δ 的点为一个頂点的 D_k^n，可以用与前节相同的方法証明 P 不属于 Δ_k^n. 含于 E 但是不为任何一个 E^j 所完全包含的 D_k^n 居于 E^1, $\cdots$, E^m 中的某两个之間，因而它与某一个 $E^j\cap E^k$ 有公共部分。从而它的頂点与 $E^j\cap E^k$ 的距离小于 δ，因之 P 不属于 Δ_k^n，而有 $\operatorname{sgn}(P, \Delta_k^n)=0$。所以可从(1)式的右端取去对应于 D_k^n 之項。于是可以写出

---

[1] $P\overline{\in}T\{「E^j」\}$. 蓋因不然，則 $\exists Q\in「E^j」: P=TQ$; 由于 E^j 閉以及 E 为并集，所以 $Q\in E$; Q 或为 E 之內点，此时 $\exists E^k: Q\in E^k$，此处 $k\neq j$，于是 $Q\in E^jE^k$, Q 或非 E 之內点，此时 $Q\in「E」$; 于是引出 $P=TQ\in T\{E^jE^k\}$ 或 $P=TQ\in T\{「E」\}$ 之結果——此与假設相違。这样一来，此处所說的就导致出来 §31(2)；逆之也如是；因此这二处所云是一致的。——譯者注

[2] 参看文中(c)。——譯者注

关系式

$$d(P, E, T)=d_n=\sum_{j=1}^{m}\sum_{k}{}_j \operatorname{sgn}(P, \Delta_k^n).$$

$\sum_k{}_j$ 是关于含在 E^j 的 D_k^n 之和。这一和就是 $d(P, E^j, T)$，因而得到

$$d(P, E, T)=d(P, E^1, T)+\cdots+d(P, E^m, T).$$

(3) P, T 关系到参变数 t，当 t 变化时，P 决不属于「E」在 T 之下的象。

設 t 的变域为 $0\leqslant t\leqslant 1$，则对于属于这一区間的所有 t 之值，从 P 到 $T\{「E」\}$ 的距离不小于固定的（卽与 t 无关的）正数❶。取 $\varepsilon>0$ 更小于这一固定的正数，而且同于(1)的情况那样取 δ, n。δ, n 也与 t 无关❷。

$$d(P, E, T)=\sum_k \operatorname{sgn}(P, \Delta_k^n) \quad (D_k^n\subset E),$$

如果 P 不通过 Δ_k^n 的边，则 $\operatorname{sgn}(P, \Delta_k^n)$ 是定值，因而只有当 P 不通过 E 所包含的 D_k^n 所对应的 Δ_k^n 的边时，是我們要討論的問題。但 P 不含于 D^n（含于 E 的 D_k^n 的幷集）的边界的象❸，因而可設 P 通过譬如是 Δ_k^n 的边 $\overline{A}_k^n\overline{B}_k^n$，则 $A_k^nB_k^n$ 不在 D^n 的周界上。所以存在有另一三角形——設它是 D_{k+1}^n——也以这一边为边。在 Δ_k^n, Δ_{k+1}^n 形成三角形的任何一种情况下（参照图 4, 5, 6），无論 P 在边 $\overline{A}_k^n\overline{B}_k^n$ 上或在其两側，可知

$$\operatorname{sgn}(P, \Delta_k^n)+\operatorname{sgn}(P, \Delta_{k+1}^n)$$

---

❶ 如不然，必有 $t_k\in[0, 1]$ 和 $Q_k\in「E」(k=1, 2, \cdots)$，使得

$$\rho(P_{t_k}, T_{t_k}(Q_k))\to 0,$$

而 $[0, 1]$ 及「E」为有界閉集合，是以有 $t\in[0, 1]$，$Q\in「E」$ 使得 $\{t_k\}$，$\{Q_k\}$ 分别具有以它們各为极限的子列。为了簡便，不妨設 $t_k\to t$，$Q_k\to Q$，由于 P, T 关于 t 皆連續，故

$$P_{t_k}\to P_t, \quad T_{t_k}(Q_k)\to T_t(Q).$$

又 ρ 为二变元之連續函数，所以

$$\rho(P_{t_k}, T_{t_k}(Q_k))\to\rho(P_t, T_t(Q)),$$

从而
$$\rho(P_t, T_t(Q))=0,$$

随之
$$P_t=T_t(Q)\in T_t\{「E」\},$$

但此与假設矛盾。——譯者注

❷ 在此 $\varepsilon>0$ 之下，对于 P_t, T_t 依 (c) 中所示来定 $\delta_t>0$，再用归謬法可証在此 $\delta_t>0$ 中存在着一个与 t 无关的 $\delta>0$。对此 $\delta>0$，再依(c)中所示来决定 n。——譯者注

❸ $P\overline{\in} T\{「D^n」\}$。如不然，则必 $P=TQ$，而 $Q\in「D^n」$，于是 $Q\in$ 某 D_k^n 的边 $A_k^nB_k^n$ 上，而此 $A_k^nB_k^n$ 却在「D^n」上。由此就可引出与 $\rho(P, T\{「E」\})>\varepsilon$ 相反的結論。——譯者注

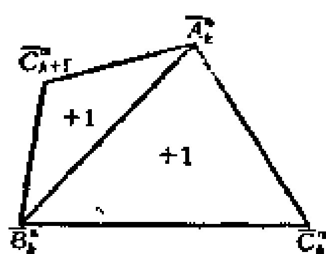


图　4

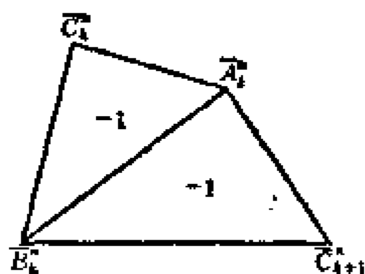


图　5

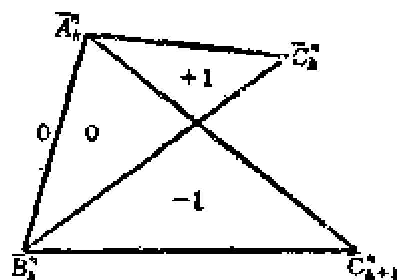


图　6

都取同一值❶。从而 $d(P, E, T)$ 保持定值。

(4) 在 $F=O$, $T=I$ 的情况下，有 $D^n_k=\Delta^n_k$，对于含于 E 的所有 D^n_k，$\operatorname{sgn}\Delta^n_k=1$. 如果 P 在 E 的外部，就有 $\operatorname{sgn}(P, \Delta^n_k)=0$，因而 (1) 式右端恒为 0，从而有 $d(P, E, I)=0$.

当 P 是 E 的内点时，如果 n 充分大，P 就被含于 D^n 的内部。如果 P 在 D^n_h 的内部，则 $\operatorname{sgn}(P, \Delta^n_h)=1$，而且对于 $k\neq h$ 有 $\operatorname{sgn}(P, \Delta^n_k)=0$，因而有 $d(P, E, I)=1$. 再若 P 在 D^n_k 的边上，则还有一个三角形与 D^n_k 共有这一边，設这一三角形为 D^n_{k+1}，則 $\operatorname{sgn}(P, \Delta^n_k)$, $\operatorname{sgn}(P, \Delta^n_{k+1})$ 都等于 1/2，而对于其他号数 k, $\operatorname{sgn}(P, \Delta^n_k)=0$，因此仍然得到 $d(P, E, I)=1$.

---

❶ Δ^n_k 不形成三角形时也应進行討論，因为討論起来异常麻煩，所以省略掉了。——原书注

第4章[1]　一般綫性方程組的解法与解的性质

§33　关于記号与表示法的一些規定

綫性微分方程組的一般形式为

$$\frac{dx_i}{dt}=a_{i1}(t)x_1+a_{i2}(t)x_2+\cdots+a_{in}(t)x_n+f_i(t)$$

$$(i=1,\ 2,\ \cdots,\ n). \tag{33.1}$$

如果考虑到 n 阶方陣

$$A=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix}=(a_{ik})$$

与 $(n\times 1)$ 矩陣

$$x=\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix},\quad f=\begin{pmatrix} f_1 \\ f_2 \\ \vdots \\ f_n \end{pmatrix},$$

由矩陣乘积的定义，(33.1)又可写为

$$\frac{dx}{dt}=Ax+f. \tag{33.2}$$[2]

在需要表明 A, x, f 是变数 t 的函数的情况下，可将它們分别写成 $A(t)$, $x(t)$ 与 $f(t)$。$(n\times 1)$ 矩陣称为列向量。相对地 $(1\times n)$ 矩陣例如 $(x_1,\ x_2,\ \cdots,\ x_n)$ 称为行向量。将矩陣 A 的行与列变换而得

---

[1] 第4～6章由佐藤常三执笔。——原书注

[2] 这里实际上是要定义函数向量(或矩阵)微分和积分的。——校者注

到的矩陣称为轉置矩陣，就是它的 i 行 k 列的元素正是 a_{ki} 的矩陣，記为 A'，但多有記为 A^T 的。从而可知，如果 x 表列向量，則 x' 表行向量。在以下的討論中把关于矩陣与向量的基本知識作为已知的知識来进行。

在(33.1)和(33.2)中缺 f 項的形式特称为**齐次型**。設已用某种方法求得(33.2)的解的一个 z，命 $x=z+y$，于是有

$$\frac{dz}{dt}+\frac{dy}{dt}=A(z+y)+f, \quad \frac{dy}{dt}=Ay.$$

由此，讀者就如同学习单个方程时那样可知，非齐次型方程組的解可表示为它的特解向量与齐次方程組的解向量的和。

向量的各个分量的絕对值的和写为 $\|x\|$，即

$$\|x\|=|x_1|+|x_2|+\cdots+|x_n|.$$

一般，称 $\|x\|$ 为向量 x 的范(norm)，并常常表示为

$$(x_1^2+x_2^2+\cdots+x_n^2)^{\frac{1}{2}}.$$

但是为了計算上的方便，用前一种形式的定义比較好些。我們称

$$d(x, y)=\|x-y\|=\sum_{i=1}^{n}|x_i-y_i|$$

为两点 x, y 間的距离，它們显然具有下述性質：

$$d(x, y)=0 \rightleftarrows x=y,$$

$$d(x, y)=d(y, x)\geqslant 0,$$

$$d(x, z)\leqslant d(x, y)+d(y, z).$$

§34 基本不等式

在限制解的行动半徑换言之即其范的等等情况下，一些必要的不等式叙述于下。

假設

$$P(t), \quad H(t)\ (\geqslant 0)$$

滿足不等式

$$u(t) \leqslant P(t) + \int_{t_0}^{t} H(\tau)u(\tau)d\tau \quad (t \geqslant t_0), \tag{34.1}$$

$u(t)$就有

$$u(t) \leqslant P(t) + e^{M(t)}\int_{t_0}^{t} e^{-M(\tau)}H(\tau)P(\tau)d\tau, \tag{34.2}$$

此处
$$M(t) = \int_{t_0}^{t} H(\tau)d\tau, \quad M(t_0) = 0.$$

理由如下:命

$$v(t) = \int_{t_0}^{t} H(\tau)u(\tau)d\tau, \quad v(t_0) = 0,$$

(34.1)就是

$$u(t) \leqslant P(t) + v(t)$$

或

$$v'(t) - H(t)v(t) \leqslant H(t)P(t).$$

上式两端各乘以 $e^{-M(t)}$, 就有

$$[e^{-M}v]' \leqslant e^{-M}H(t)P(t).$$

如从 t_0 到 t 积分此式,就得到

$$v(t) \leqslant e^{M(t)}\int_{t_0}^{t} e^{-M(\tau)}H(\tau)P(\tau)d\tau.$$

由此可以得到(34.2)。

关于不等式(34.2),若命

$$m(t, s) = \int_{s}^{t} H(\tau)d\tau,$$

则由于

$$m(t, s) = m(t, t_0) - m(s, t_0) = M(t) - M(s),$$

(34.2)又可以写为

$$u(t) \leqslant P(t) + \int_{t_0}^{t} e^{m(t,\tau)}\frac{\partial m(\tau, s)}{\partial \tau}P(\tau)d\tau. \tag{34.3}$$

从(34.1)导出(34.2)以及(34.3)的过程中,应用了 Volterra 型积分方程的核的相反关系式。核 $K(x, y)$ 的相反核取作 $\Gamma(x, y)$,相反关系式就是

$$K(x, y) + \Gamma(x, y) = \int_{y}^{x} K(x, t)\Gamma(t, y)dt = \int_{y}^{x} \Gamma(x, t)K(t, y)dt.$$

若命 $K(x, y) = H(y)$,就有

$$\Gamma(x, y) = -H(y)e^{m(x,y)}$$ ❶.

(34.1)的两端各乘以$\Gamma(t, y)$，并关于y从t_0到t积分，就用到上述相反关系式了❷。

这里值得注意的是为使(34.1)，(34.2)，(34.3)成立，对于所使用的函数必須賦与足够的条件，但是在不特别要求严格性的情况下，这些地方就不指出了。在今后的討論中也是这样处理的。

现在应用上面导出的不等式来估計(33.1)和(33.2)的解向量的范。化(33.2)为积分方程

$$x(t) = x(t_0) + \int_{t_0}^{t} A(\tau)x(\tau)d\tau + \int_{t_0}^{t} f(\tau)d\tau, \qquad (34.4)$$

取其范就得到

$$\|x(t)\| \leqslant \|x(t_0)\| + \int_{t_0}^{t} \|A(\tau)x(\tau)\|d\tau + \int_{t_0}^{t} \|f(\tau)\|d\tau$$ ❸.

---

❶ 将此$\Gamma(x, y)$代入上等式，加以检驗：

$$\int_y^x K(x, t)\Gamma(t, y)dt = -\int_y^x H(t)H(y)e^{m(t,y)}dt$$

$$= -\int_y^x H(t)H(y)e^{M(t)}e^{-M(y)}dt = -H(y)e^{-M(y)}\int_y^x H(t)e^{M(t)}dt$$

$$= -H(y)e^{-M(y)}\left(\int e^{M(t)}dM(t)\right)_y^x = -H(y)e^{-M(y)}\left(e^{M(t)}\right)_y^x$$

$$= -H(y)e^{-M(y)}(e^{M(x)} - e^{M(y)}) = -H(y)e^{M(x)-M(y)} + H(y)$$

$$= H(y) + \Gamma(x, y) = K(x, y) + \Gamma(x, y).$$ ——譯者注

❷ 回顾由(34.1)到(34.2)的推导过程中，不等式两端先后乘了因子$H(t)$，$e^{-M(t)}$，这无异于一开始就以因子$-H(t)e^{-M(t)}e^{M(y)} = \Gamma(y, t)$乘(34.1)，而$\Gamma(y, t)$就是核$K(x, t) = H(t)$的相反核，所以說在此过程中利用了上述的相反关系式了。

——譯者注

❸ 这里用到了$\|x+y\| \leqslant \|x\| + \|y\|$．此处$x$，$y$为向量，以及$\left\|\int_{t_0}^{t} x(\tau)d\tau\right\| \leqslant \int_{t_0}^{t} \|x(\tau)\|d\tau$．今只对后者証明。此处

$$\left\|\int_{t_0}^{t} x(\tau)d\tau\right\| = \left\|\begin{pmatrix}\int_{t_0}^{t} x_1(\tau)d\tau \\ \vdots \\ \int_{t_0}^{t} x_n(\tau)d\tau\end{pmatrix}\right\| = \left|\int_{t_0}^{t} x_1(\tau)d\tau\right| + \cdots + \left|\int_{t_0}^{t} x_n(\tau)d\tau\right|$$

$$\leqslant \int_{t_0}^{t} |x_1(\tau)|d\tau + \cdots + \int_{t_0}^{t} |x_n(\tau)|d\tau = \int_{t_0}^{t} \|x(\tau)\|d\tau.$$ ——譯者注

然而 $A(\tau)x(\tau)$ 的第 i 分量为

$$|[Ax]_i| = \left|\sum_{k=1}^{n} a_{ik}(\tau)x_k(\tau)\right| \leqslant \sum_{k} |a_{ik}|\,|x_k|.$$

今設

$$\operatorname*{Max}_{k} \sum_{i=1}^{n} |a_{ik}(t)| = H(t),$$

于是有

$$\|x(t)\| \leqslant \|x(t_0)\| + \int_{t_0}^{t} \|f(\tau)\|d\tau + \int_{t_0}^{t} H(\tau)\|x(\tau)\|d\tau.$$

根据(34.2)可以得到对应于它的不等式

$$\|x(t)\| \leqslant \|x(t_0)\| + \int_{t_0}^{t} \|f(\tau)\|d\tau$$
$$+ e^{M(t)}\int_{t_0}^{t} e^{-M(\tau)}H(\tau)d\tau\left\{\|x(t_0)\| + \int_{t_0}^{\tau}\|f(\tau')\|d\tau'\right\},$$

整理上式就得到

$$\|x(t)\| \leqslant \|x(t_0)\|e^{M(t)} + \int_{t_0}^{t} \|f(\tau)\|d\tau$$
$$+ \int_{t_0}^{t} \{e^{(M(t)-M(\tau))} - 1\}\|f(\tau)\|d\tau ❶,$$

---

❶ 因 $\|x(t)\| \leqslant \|x(t_0)\| + \int_{t_0}^{t}\|f(\tau)\|d\tau$

$$+ e^{M(t)}\int_{t_0}^{t} e^{-M(\tau)}H(\tau)d\tau\left\{\|x(t_0)\| + \int_{t_0}^{\tau}\|f(\tau')\|d\tau'\right\},$$

而 $\|x(t_0)\| + e^{M(t)}\int_{t_0}^{t} e^{-M(\tau)}H(\tau)\|x(t_0)\|d\tau = \|x(t_0)\|(1 + e^{M(t)}[-e^{-M(\tau)}]_{t_0}^{t})$

$= \|x(t_0)\|(1 + e^{M(t)}(-e^{-M(t)} + e^{-M(t_0)})) = \|x(t_0)\|(1 - 1 + e^{M(t)}) = \|x(t_0)\|e^{M(t)}$,

又 $e^{M(t)}\int_{t_0}^{t} e^{-M(\tau)}H(\tau)d\tau\int_{t_0}^{\tau}\|f(\tau')\|d\tau' = e^{M(t)}\left[\int -\left(\int_{t_0}^{\tau}\|f(\tau')\|d\tau'\right)de^{-M(\tau)}\right]_{t_0}^{t}$

$= e^{M(t)}\left[-\int_{t_0}^{\tau}\|f(\tau')\|d\tau'\cdot e^{-M(\tau)} + \int e^{-M(\tau)}\|f(\tau)\|d\tau\right]_{t_0}^{t}$

$= e^{M(t)}\left[-\int_{t_0}^{t}\|f(\tau')\|d\tau'\cdot e^{-M(t)} + \int_{t_0}^{t} e^{-M(\tau)}\|f(\tau)\|d\tau\right]$

$= e^{M(t)}\int_{t_0}^{t} e^{-M(\tau)}\|f(\tau)\|d\tau - \int_{t_0}^{t}\|f(\tau')\|d\tau'$

$= \int_{t_0}^{t} e^{M(t)-M(\tau)}\|f(\tau)\|d\tau - \int_{t_0}^{t}\|f(\tau)\|d\tau = \int_{t_0}^{t}(e^{M(t)-M(\tau)} - 1)\|f(\tau)\|d\tau.$

故 $\|x(t)\| \leqslant \|x(t_0)\|e^{M(t)} + \int_{t_0}^{t}\|f(\tau)\|d\tau + \int_{t_0}^{t}(e^{M(t)-M(\tau)} - 1)\|f(\tau)\|d\tau.$

——譯者注

$$\|x(t)\| \leqslant \|x(t_0)\| e^{M(t)} + \int_{t_0}^{t} e^{(M(t)-M(\tau))} \|f(\tau)\| d\tau. \qquad (34.5)$$

特别当

$$H \leqslant H_0(\text{常数}), \quad \|f(t)\| \leqslant \alpha(\text{常数})$$

时，就有

$$\|x(t)\| \leqslant \left[\|x(t_0)\| + \frac{\alpha}{H_0}(1 - e^{-H_0(t-t_0)}) \right] e^{H_0(t-t_0)} ❶. \qquad (34.6)$$

我們还可以估計表示解向量的两点 x^1, x^2 間的距离。对于这两点的向量差有

$$x^1(t) - x^2(t) = x^1(t_0) - x^2(t_0)$$
$$+ \int_{t_0}^{t} A(\tau)\{x^1(\tau) - x^2(\tau)\} d\tau$$

成立。从而由(34.5)直接得到

---

❶ 因 $H \leqslant H_0$，而 $M(t) = \int_{t_0}^{t} H(\tau) d\tau$，于是

$$M(t) \leqslant H_0(t - t_0),$$

随之，

$$e^{M(t)} \leqslant e^{H_0(t-t_0)},$$

又因 $\|f(t)\| \leqslant \alpha$，从而

$$\int_{t_0}^{t} e^{M(t)-M(\tau)} \|f(\tau)\| d\tau \leqslant \alpha \int_{t_0}^{t} e^{M(t)-M(\tau)} d\tau$$
$$= \alpha \cdot e^{M(t)} \int_{t_0}^{t} e^{-M(\tau)} d\tau \leqslant \alpha \cdot e^{H_0(t-t_0)} \int_{t_0}^{t} e^{-M(\tau)} d\tau$$
$$= \alpha \cdot e^{H_0(t-t_0)} \left[\int \frac{e^{-M(\tau)}}{-H} d(-M(\tau)) \right]_{t_0}^{t} \leqslant \alpha \cdot e^{H_0(t-t_0)} \left[\int \frac{e^{-M(\tau)}}{-H_0} d(-M(\tau)) \right]_{t_0}^{t}$$
$$= \alpha \cdot e^{H_0(t-t_0)} \frac{-1}{H_0} (e^{-M(t)} - 1) = \frac{\alpha \cdot e^{H_0(t-t_0)}}{H_0} (1 - e^{-M(t)})$$
$$\leqslant \frac{\alpha \cdot e^{H_0(t-t_0)}}{H_0} (1 - e^{-H_0(t-t_0)}).$$

因此，

$$\|x(t)\| \leqslant \|x(t_0)\| e^{H_0(t-t_0)} + \frac{\alpha \cdot e^{H_0(t-t_0)}}{H_0} (1 - e^{-H_0(t-t_0)})$$
$$= e^{H_0(t-t_0)} \left(\|x(t_0)\| + \frac{\alpha}{H_0} (1 - e^{-H_0(t-t_0)}) \right).$$——譯者注

$$d(x^1, x^2) \leqslant d_0(x^1, x^2)e^{M(t)} \text{❶}, \tag{34.7}$$

这里 $d_0(x^1, x^2) = [d(x^1, x^2)]_{t=t_0}$.

(34.7)給出了估計两个解随时間的增长而分离到多大程度的一个标准,就这一意义說这个結果是很重要的。

有了以上的預备知識,我們可以引入本論。

§35 逐次逼近法

当矩陣函数 $A(t)$ 与向量函数 $f(t)$ 都是定义区間 $\alpha \leqslant t \leqslant \beta$ 上的連續函数时,在全区間上微分方程(33.2)的解向量 $x(t)$ 是存在的,而且在 $t=t_0$ 时通过任意点 x^0 的解只有一个(存在与唯一性);

---

❶ 因 $x^1(t)-x^2(t)=x^1(t_0)-x^2(t_0)+\int_{t_0}^t A(\tau)(x^1(\tau)-x^2(\tau))d\tau$,故

$$\|x^1(t)-x^2(t)\| \leqslant \|x^1(t_0)-x^2(t_0)\| + \int_{t_0}^t \|A(\tau)\| \|x^1(\tau)-x^2(\tau)\| d\tau,$$

借助于(34.2),由上不等式可得出

$$\|x^1(t)-x^2(t)\| \leqslant \|x^1(t_0)-x^2(t_0)\| + e^{M(t)}\int_{t_0}^t e^{-M(\tau)}\|A(\tau)\| \|x^1(t_0)-x^2(t_0)\| d\tau$$

$$= \|x^1(t_0)-x^2(t_0)\| + \|x^1(t_0)-x^2(t_0)\| e^{M(t)}\int_{t_0}^t e^{-M(\tau)}\|A(\tau)\| d\tau,$$

但此处 $M(t)=\int_{t_0}^t \|A(\tau)\| d\tau, \quad M(t_0)=0,$

故 $$\int_{t_0}^t e^{-M(\tau)}\|A(\tau)\| d\tau = -\left[\int e^{-M}d(-M(\tau))\right]_{t_0}^t = -[e^{-M(\tau)}]_{t_0}^t$$

$$= -[e^{-M(t)}-1] = 1-e^{-M(t)},$$

从而 $$\|x^1(t)-x^2(t)\| \leqslant \|x^1(t_0)-x^2(t_0)\|[1+e^{M(t)}(1-e^{-M(t)})]$$

$$= \|x^1(t_0)-x^2(t_0)\|[1+e^{M(t)}-1] = \|x^1(t_0)-x^2(t_0)\|e^{M(t)}.$$

或依 $x^1(t)-x^2(t)=x^1(t_0)-x^2(t_0)+\int_{t_0}^t A(\tau)(x^1(\tau)-x^2(\tau))d\tau$,

可将 $x^1(t)-x^2(t)$ 看成是积分方程

$$x^1(t)-x^2(t)=x^1(t_0)-x^2(t_0)+\int_{t_0}^t A(\tau)(x^1(\tau)-x^2(\tau))d\tau+\int_{t_0}^t f(\tau)d\tau,$$

此处 $f(\tau)$ 为零向量,也即齐次微分方程

$$\frac{dx^1(t)-x^2(t)}{dt}=A(t)(x^1(t)-x^2(t))$$

的解向量。于是由(34.5)直接可求得。——譯者注

这一事实就是所討論过的一般理論的必然結論[1]。

对于某一个矩陣 B，如果常数 M，关于所有向量 x，使得

$$\|Bx\| \leqslant M\|x\|$$

成立，我們就說矩陣 B 是有界的。特別地，对于 $\|x\|=1$ 的这样的 x，使上不等式成立的 M 所构成的数集的下确界标記为 M_B，則显然

$$M_B \leqslant M, \quad \|Bx\| \leqslant M_B\|x\| \text{[2]}.$$

对于矩陣函数 $A(t)$，有下列关系成立：

$$\|A(t)x\| \leqslant M_A(t)\|x\|, \quad M_A(t) \leqslant H(t) \text{[3]}.$$

对于任意两个矩陣函数 $A(t)$，$B(t)$，显然有

$$M_{AB}(t) \leqslant M_A(t)M_B(t) \text{[4]}.$$

試考察由矩陣函数 $K(t, \tau)$ (設它关于两个变数 t，τ 是連續的)所作出的如下迭次矩陣：

---

[1] 参考第2章§17定理5。——譯者注

[2] 在注意到 $\left\{M \middle| \begin{matrix}\|Bx\| \leqslant M\|x\| \\ \|x\|=1\end{matrix}\right\} \leqslant \left\{M \middle| \|Bx\| \leqslant M\|x\|\right\}$ 与每个 x 可化为范为1的 $\frac{x}{\|x\|}$ 的事实后，則可知

$$M_B = \inf\left\{M \middle| \begin{matrix}\|Bx\| \leqslant M\|x\| \\ \|x\|=1\end{matrix}\right\} = \inf\left\{M \middle| \|Bx\| \leqslant M\|x\|\right\}.$$

由此，以及用归謬法可証明 M_B 的充要条件为：

$$M_B \leqslant \text{每个 } M, \quad \|Bx\| \leqslant M_B\|x\|. \text{——譯者注}$$

[3] 因 $\|A(t)x(t)\| = \left\|\begin{pmatrix} a_{11}(t)x_1(t)+\cdots+a_{1n}(t)x_n(t) \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ a_{n1}(t)x_1(t)+\cdots+a_{nn}(t)x_n(t)\end{pmatrix}\right\| \leqslant |a_{11}(t)||x_1(t)|+\cdots$

$$+|a_{1n}(t)||x_n(t)|+\cdots+|a_{n1}(t)||x_1(t)|+\cdots+|a_{nn}(t)||x_n(t)|$$
$$=|x_1(t)|(|a_{11}(t)|+\cdots+|a_{n1}(t)|)+\cdots+|x_n(t)|(|a_{1n}(t)|+\cdots+|a_{nn}(t)|)$$
$$\leqslant |x_1(t)|H(t)+\cdots+|x_n(t)|H(t)=H(t)\|x(t)\|,$$

故 $M_A(t)$ 存在且 $M_A(t) \leqslant H(t)$。——譯者注

[4] 因 $$\|ABx\| = \|A(Bx)\| \leqslant M_A\|Bx\|,$$

而 $\|Bx\| \leqslant M_B\|x\|$，是以 $\|ABx\| \leqslant M_A M_B\|x\|$，从而

$$M_{AB} \leqslant M_A M_B. \text{——譯者注}$$

$$K_1(t,\tau)=K(t,\tau),\ K_2(t,\tau)=\int_\tau^t K(t,\tau')K(\tau',\tau)d\tau',\ \cdots,$$

一般的

$$K_{n+1}(t,\tau)=\int_\tau^t K_n(t,\tau')K(\tau',\tau)d\tau'.$$

为方便計將

$$M_{K_1},\ M_{K_2},\ \cdots \text{写为}\ M^{(1)}(t,\tau),\ M^{(2)}(t,\tau),\ \cdots,$$

則有

$$\|K_{n+1}x\|\leqslant\int_\tau^t \|K_nKx\|d\tau'\leqslant\|x\|\int_\tau^t M^{(n)}(t,\tau')M^{(1)}(\tau',\tau)d\tau'\text{❶},$$

因而有

$$M^{(n+1)}(t,\tau)\leqslant\int_\tau^t M^{(n)}(t,\tau')M^{(1)}(\tau',\tau)d\tau'\quad\text{(这是标量)。}$$

特别，当 $M^{(1)}\leqslant M$（常数）时，有

$$M^{(n+1)}(t,\tau)\leqslant M^{n+1}\frac{(t-\tau)^n}{n!}\text{❷}.$$

---

❶ 因 $$K_{n+1}(t,\tau)=\int_\tau^t K_n(t,\tau')K(\tau',\tau)d\tau'.$$

則 $$K_{n+1}(t,\tau)x(t)=\int_\tau^t K_n(t,\tau')K(\tau',\tau)x(t)d\tau',$$

从而 $$\|K_{n+1}(t,\tau)x(t)\|\leqslant\int_\tau^t \|K_n(t,\tau)K(\tau',\tau)x(t)\|d\tau'\text{(見第 108 頁注❸)}$$

$$\leqslant\int_\tau^t M^{(n)}(t,\tau')M^{(1)}(\tau',\tau)\|x(t)\|d\tau'\text{(見第 112 頁注❹)}$$

$$=\|x(t)\|\int_\tau^t M^{(n)}(t,\tau')M^{(1)}(\tau',\tau)d\tau'.$$——譯者注

❷ 当 $n=1$ 时，

$$M^{(2)}(t,\tau)\leqslant\int_\tau^t M^{(1)}(t,\tau)M^{(1)}(\tau',\tau)d\tau'\leqslant\int_\tau^t M^2d\tau'=M^2(t-\tau).$$

假設 n 时命題成立，則

$$M^{(n+1)}(t,\tau)\leqslant\int_\tau^t M^{(n)}(t,\tau)M^{(1)}(\tau',\tau)\,d\tau'\leqslant\int_\tau^t M^n\frac{(t-\tau')^{n-1}}{(n-1)!}Md\tau'$$

$$=\int_\tau^t\frac{M^{n+1}(t-\tau')^{n-1}}{(n-1)!}d\tau'=-\frac{M^{n+1}}{(n-1)!}\left.\frac{(t-\tau')^n}{n}\right|_\tau^t$$

$$=M^{n+1}\frac{(t-\tau)^n}{n!}.$$——譯者注

現在来考慮矩陣級数：

$$\sum_0^{\infty} \lambda^h K_{h+1}(t, \tau) \quad (\lambda \text{ 是标量})。$$

因为对于任意向量 x 有

$$\left\| \left(\sum_{h=0}^{n} \lambda^h K_{h+1}(t, \tau) \right) x \right\| \leqslant \|x\| \sum_{h=0}^{n} M^{h+1} \frac{(\lambda(t-\tau))^h}{h!} ❶,$$

所以这一矩陣級数是收斂的，而且是一致收斂的，因而可以把它写为

$$-\Gamma(t, \tau; \lambda) = \sum_{h=0}^{\infty} \lambda^h K_{h+1}(t, \tau) \quad (\text{Neumann 級数}) ❷。$$

仿照标量函数的情况，称 K 为核矩陣，Γ 为 K 的相反核矩陣，同样有相反关系式成立：

---

❶ $\left\| \left(\sum_{h=0}^{n} \lambda^h K_{h+1}(t, \tau) \right) x \right\| \leqslant \sum_{h=0}^{n} \lambda^h \| K_{h+1}(t, \tau) x \| \leqslant \sum_{h=0}^{n} \lambda^h M^{(h+1)}(t, \tau) \|x\|$

$\leqslant \left(\sum_{h=0}^{n} \lambda^h M^{h+1} \frac{(t-\tau)^h}{h!} \right) \|x\|$（見第113頁注❸）.——譯者注

❷ 对于 n 行 n 列复矩陣 $A=(a_{ij})$，定义其范为 $\|A\| = \sum_{i,j=1}^{n} |a_{ij}|$。設 $\{A_k\}$ 为矩陣叙列，如果对于任一 $\varepsilon>0$，$\exists N(\varepsilon)$，使当 $k>N$ 时，$\|A_k - A\| < \varepsilon$，则称 $\{A_k\}$ 收斂于 A；同样，对于 $\{A_k(t)\}$ 及 $A(t)$，$\alpha \leqslant t \leqslant \beta$，如当 $k>N(\varepsilon)$ 时，$\|A_k(t) - A(t)\| < \varepsilon$ 与 t 无关地成立，則称 $\{A_k(t)\}$ 在 $\alpha \leqslant t \leqslant \beta$ 上一致收斂于 $A(t)$。显然，这等价于 $a_{ij}^{(k)}(t)$ 在 $\alpha \leqslant t \leqslant \beta$ 上一致收斂于 $a_{ij}(t)$。

对于矩陣函数項級数 $\sum_k A_k(t)$，如果部分和叙列收斂或一致收斂，則此級数收斂或一致收斂；显然，級数中 Cauchy 收斂充要条件，逐項积分定理于此也可成立。

設 x 为任一向量，如果 $\|Ax\| \leqslant \|x\| \varepsilon$，則 $\|A\| \leqslant n\varepsilon$。事实上，$\|Ax\| = \sum_{i,j=1}^{n} |a_{ij} x_j|$，置 x 为单位列向量，則 $\sum_{i=1}^{n} |a_{ik}| = \|Ax\| \leqslant \varepsilon$，从而 $\sum_{i,j=1}^{n} |a_{ij}| \leqslant n\varepsilon$。

在此令 $\quad \sum_{h=m}^{m+p} \lambda^h K_{h+1}(t, \tau) = A, \quad \sum_{h=m}^{m+p} M^{h+1} \frac{(\lambda(t-\tau))^h}{h!} = \varepsilon,$

即知 $\sum_{h=0}^{\infty} \lambda^h K_{h+1}(t, \tau)$ 收斂，若再控制 $|t-\tau|$，則知其为一致收斂。——譯者注

$$K(t, \tau)+\Gamma(t, \tau; \lambda)=\lambda\int_{\tau}^{t} \Gamma(t, \tau'; \lambda)K(\tau', \tau)d\tau' \text{❶}$$

$$=\lambda\int_{\tau}^{t} K(t, \tau')\Gamma(\tau', \tau;\lambda)d\tau'.$$

可以証明这一結果与标量情况相同，即对于任意自然数 n，有

$$\int_{\tau}^{t} K_n(t, \tau')K(\tau', \tau)d\tau'=\int_{\tau}^{t} K(t, \tau')K_n(\tau', \tau)d\tau' \text{❷}$$

---

❶ $K(t, \tau')\Gamma(\tau', \tau; \lambda)$ 于 $\tau\leqslant\tau'\leqslant t$ 一致收斂，因

$$\left\|\left(-\sum_{h=m}^{m+p}K(t, \tau')\lambda^h K_{h+1}(\tau', \tau)\right)x\right\|$$

$$\leqslant \max_{\tau\leqslant\tau'\leqslant t} M_k(t, \tau')\ \|x\|\sum_{h=m}^{m+p} M^{h+1}\ \frac{(\lambda(t-\tau))^h}{h!}$$

(見第 112 頁注❹)再借助于逐項积分定理，則

$$\int_{\tau}^{t} K(t, \tau')\Gamma(\tau', \tau; \lambda)d\tau'=\int_{\tau}^{t} -\sum_{h=0}^{\infty} K(t, \tau')\lambda^h K_{h+1}(\tau', \tau)d\tau'$$

$$=-\sum_{h=0}^{\infty}\lambda^h\int_{\tau}^{t} K(t, \tau')K_{h+1}(\tau', \tau)d\tau'.$$ ——譯者注

❷ $$\int_{\tau}^{t} K_2(t, \tau')K(\tau', \tau)d\tau'=\int_{\tau}^{t} K(t, \tau')K_2(\tau', \tau)d\tau'.$$

(此系矩陣等式，为了符号的节約与簡明，以下把它看成它自己的第 (i, k) 元素。)因

$$\int_{\tau}^{t} K(t, \tau')K_2(\tau', \tau)d\tau'=\int_{\tau}^{t} K(t, \tau')\int_{\tau}^{\tau'} K(\tau', \tau'')K(\tau'', \tau)d\tau''d\tau'$$

$$=\int_{\tau}^{t}\int_{\tau}^{\tau'}K(t, \tau')K(\tau', \tau'')K(\tau'', \tau)d\tau''d\tau'$$

$$=\int_{\tau}^{t}\left(\int_{\tau''}^{t} K(t, \tau')K(\tau', \tau'')d\tau'\right)K(\tau'', \tau)d\tau''$$

$$=\int_{\tau}^{t} K_2(t, \tau'')K(\tau'', \tau)d\tau''=K_3(t, \tau)=\int_{\tau}^{t} K_2(t, \tau')K(\tau', \tau)d\tau'.$$

假設 n 时命題成立，即

$$\int_{\tau}^{t} K_n(t, \tau')K(\tau', \tau)d\tau'=\int_{\tau}^{t} K(t, \tau')K_n(\tau', \tau)d\tau',$$

則 $$\int_{\tau}^{t} K(t, \tau')K_{n+1}(\tau', \tau)d\tau'=\int_{\tau}^{t} K(t, \tau')\int_{\tau}^{\tau'} K_n(\tau', \tau'')K(\tau'', \tau)d\tau''d\tau'$$

$$=\int_{\tau}^{t}\int_{\tau}^{\tau'}K(t, \tau')K_n(\tau', \tau'')K(\tau'', \tau)d\tau''d\tau'$$

$$=\int_{\tau}^{t}\left(\int_{\tau''}^{t} K(t, \tau')K_n(\tau', \tau'')d\tau'\right)K(\tau'', \tau)d\tau''$$

$$=\int_{\tau}^{t} K_{n+1}(t, \tau'')K(\tau'', \tau)d\tau''$$ (归納假定及 K_n 定义)。——譯者注

成立（首先，在 $n=2$ 的情况下对于其第 (i, k) 元素容易得到証明，一般情况要用数学归納法来証）。

于是当用积分方程(34.4)代替微分方程(33.1)或(33.2)时，就可以利用上述相反关系。在这一情况下，如果用 $A(\tau)$ 为核矩陣，迭次核矩陣就为：

$$K(t, \tau)=A(\tau), \quad K_n(t, \tau)=B_n(t, \tau)A(\tau),$$

$$B_1=E, \quad B_n(t, \tau)=\int_\tau^t B_{n-1}(t, \tau')A(\tau')d\tau' \text{❶}.$$

相反核矩陣就是：

$$-\Gamma(t, \tau)=\sum_{k=0}^{\infty} K_{k+1}(t, \tau)=(E+B_2+B_3+\cdots)A.$$

特别，当 A 是常数矩陣时，就有

$$K_n=A^n\frac{(t-\tau)^{n-1}}{(n-1)!}, \quad -\Gamma=Ae^{(t-\tau)A} \text{❷},$$

此处

$$e^{\lambda A}=E+\frac{\lambda A}{1!}+\frac{\lambda^2A^2}{2!}+\cdots+\frac{\lambda^nA^n}{n!}+\cdots.$$

---

❶ 这里所定义的 $K_n(t, \tau)$ 是和以上的一致，即

$$K_n(t, \tau)=B_n(t, \tau)A(\tau)=\int_\tau^t K_{n-1}(t, \tau')K(\tau', \tau)d\tau'.$$

因

$$K_2(t, \tau)=B_2(t, \tau)A(\tau)=\int_\tau^t B_1(t, \tau')A(\tau')d\tau'\cdot A(\tau)$$

$$=\int_\tau^t EA(\tau')A(\tau)d\tau'=\int_\tau^t K(t, \tau')K(\tau', \tau)d\tau'.$$

假設 n 时命題成立，則

$$K_{n+1}(t, \tau)=B_{n+1}(t, \tau)A(\tau)=\int_\tau^t B_n(t, \tau')A(\tau')d\tau'\cdot A(\tau)$$

$$=\int_\tau^t B_n(t, \tau')A(\tau')A(\tau)d\tau'=\int_\tau^t K_n(t, \tau')K(\tau', \tau)d\tau'.$$

——譯者注

❷ 当 A 为常数矩陣，用归納法可証

$$B_n(t, \tau)=A^{n-1}\frac{(t-\tau)^{n-1}}{(n-1)!},$$

从而 $$K_n(t, \tau)=B_n(t, \tau)A(\tau)=A^n\frac{(t-\tau)^{n-1}}{(n-1)!}.$$ ——譯者注

今以 $\Gamma(t,\ \tau)$ 乘(34.4)的两端并积分,就得到

$$\int_{t_0}^{t}\Gamma(t,\ \tau)x(\tau)d\tau$$
$$=\int_{t_0}^{t}\Gamma(t,\ \tau)\left\{x(t_0)+\int_{t_0}^{\tau}f(s)ds\right\}d\tau$$
$$+\int_{t_0}^{t}\left[\int_{s}^{t}\Gamma(t,\ \tau)K(\tau,\ s)d\tau\right]x(s)ds\text{❶},$$

利用相反关系又可以

$$=\int_{t_0}^{t}\Gamma(t,\ \tau)\left\{x(t_0)+\int_{t_0}^{\tau}f(s)ds\right\}d\tau$$
$$+\int_{t_0}^{t}[K(t,\ s)+\Gamma(t,\ s)]x(s)ds.$$

因而有

$$x(t)=x(t_0)+\int_{t_0}^{t}f(\tau)d\tau-\int_{t_0}^{t}\Gamma(t,\ \tau)x(t_0)d\tau$$
$$-\int_{t_0}^{t}\Gamma(t,\ \tau)d\tau\int_{t_0}^{\tau}f(s)ds\text{❷}. \qquad (35.1)$$

这就是(34.4)的解,亦是微分方程組(33.1)和(33.2)的解中的满足初始条件:当 $t=t_0$ 时 $x=x^0(=x(t_0))$ 的一个。

特别,当方程是齐次型($f\equiv0$)时,更有簡单的形式

$$x(t)=\left[E-\int_{t_0}^{t}\Gamma(t,\ \tau)d\tau\right]x(t_0). \qquad (35.2)$$

---

❶ 可参照第115頁注❷証明。——譯者注

❷ 因 $\int_{t_0}^{t}\Gamma(t,\tau)x(\tau)d\tau=\int_{t_0}^{t}\Gamma(t,\tau)x(t_0)d\tau+\int_{t_0}^{t}\Gamma(t,\tau)\int_{t_0}^{\tau}f(s)dsd\tau$
$+\int_{t_0}^{t}K(t,s)x(s)ds+\int_{t_0}^{t}\Gamma(t,s)x(s)ds,$

又 $K(t,s)=A(s)$,以及(34.4),故

$$x(t)-x(t_0)-\int_{t_0}^{t}f(\tau)d\tau+\int_{t_0}^{t}\Gamma(t,\tau)x(t_0)d\tau$$
$$+\int_{t_0}^{t}\Gamma(t,\tau)\int_{t_0}^{\tau}f(s)dsd\tau=0,$$

即
$$x(t)=x(t_0)+\int_{t_0}^{t}f(\tau)d\tau-\int_{t_0}^{t}\Gamma(t,\tau)x(t_0)d\tau$$
$$-\int_{t_0}^{t}\Gamma(t,\tau)\int_{t_0}^{\tau}f(s)dsd\tau.$$ ——譯者注

当核矩陣是常数时，就有

$$-\int_{t_0}^{t} \Gamma(t,\ \tau)d\tau = A\int_{t_0}^{t} e^{(t-\tau)A}d\tau = e^{(t-t_0)A} - E,$$

$$-\int_{t_0}^{t} \Gamma(t,\ \tau)d\tau \int_{t_0}^{\tau} f(s)ds = -\int_{t_0}^{t} ds \int_{s}^{t} \Gamma(t,\ \tau)f(s)d\tau$$

$$= \int_{t_0}^{t} (e^{A(t-s)} - E)f(s)ds.$$

于是(35.1)，(35.2)可分别化成如下的簡单形式：

$$x(t) = e^{(t-t_0)A}\left\{x(t_0) + \int_{t_0}^{t} e^{-(\tau-t_0)A}f(\tau)d\tau\right\}, \qquad (35.3)$$

$$x(t) = e^{(t-t_0)A}x(t_0). \qquad (35.4)$$

逐次逼近法

为了解 (34.4)，可以根据

$$x^n(t) = x^0 + \int_{t_0}^{t} A(\tau)x^{n-1}(\tau)d\tau + \int_{t_0}^{t} f(\tau)d\tau,$$

而从 $x^0(t)$ 出发，逐次求 x^1，x^2，$\cdots$，就可以得到作为极限向量函数的而且滿足初始条件 $x(t_0)=x^0$ 的解。这里作为出发点的向量函数 $x^0(t)$ 普通取初值向量，一般說，如果 $x^0(t)$ 是任意連續函数也就够了，在处理实际問題时，可依問題的性质来选定。

这一个依逐次代入而得到的逼近法，与应用前述相反关系的方法在本质上是同一件事情❶。

§36 齐次方程組的基本性质

設齐次方程組

$$\frac{dx}{dt} = A(t)x$$

的 n 个解向量为 x^1，x^2，$\cdots$，x^n，此处

---

❶ (35.1)中 Γ 为級数，在实际計算时势必取其近似值。它們之极限为 $x(t)$，正如此处 x^n 之极限为 $x(t)$一样。

特别，(35.4)中近似值与此处 x^n 正相吻合。——譯者注

$$x^k=\begin{pmatrix} x_{1k} \\ x_{2k} \\ \vdots \\ x_{nk} \end{pmatrix}, \text{于是 } \frac{dx^k}{dt}=Ax^k \quad (k=1, 2, \cdots, n).$$

作矩陣 X 使其第(i, k)-元素为 x_{ik}:

$$X=\begin{pmatrix} x_{11} & x_{12} & \cdots & x_{1n} \\ x_{21} & x_{22} & \cdots & x_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ x_{n1} & x_{n2} & \cdots & x_{nn} \end{pmatrix}.$$

称这一矩陣为所給方程的解矩陣。显然有

$$\frac{dX}{dt}=A(t)X. \tag{36.1}$$

矩陣 X 的行列式$|X|$称为 n 个解的 $x^1, x^2, \cdots, x^n$ 的 Wronskian 行列式,关于此行列式有下一重要关系式:

$$|X(t)|=|X(t_0)|e^{\int_{t_0}^{t}\mathrm{tr}A d\tau} \tag{36.2}$$

成立。此处 $\mathrm{tr}A$ 即

$$a_{11}(t)+a_{22}(t)+\cdots+a_{nn}(t)\text{❶},$$

换言之,$\mathrm{tr}A$ 表示 A 的对角綫上元素的总和。

这一性质的証明是容易的。由行列式的构造性的定义易得

$$\frac{d|X|}{dt}=\sum_{i=1}^{n}\begin{vmatrix} x_{11} & x_{12} & \cdots & x_{1n} \\ x_{21} & x_{22} & \cdots & x_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \frac{dx_{i1}}{dt} & \frac{dx_{i2}}{dt} & \cdots & \frac{dx_{in}}{dt} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ x_{n1} & x_{n2} & \cdots & x_{nn} \end{vmatrix}$$

(上式显示出只对 i 行的元素微分,其他行的元素保持不变)。然而

❶ 此处 tr 为迹 trace 的縮写。——譯者注

由(36.1)可得

$$\frac{dx_{ik}}{dt}=\sum_j a_{ij}x_{jk},$$

因而

$$\frac{d|X|}{dt}=\sum_i\sum_j\begin{vmatrix} x_{11} & x_{12} & \cdots & x_{1n}\\ x_{21} & x_{22} & \cdots & x_{2n}\\ \vdots & \vdots & & \vdots\\ a_{ij}x_{j1} & a_{ij}x_{j2} & \cdots & a_{ij}x_{jn}\\ \vdots & \vdots & & \vdots\\ x_{n1} & x_{n2} & \cdots & x_{nn}\end{vmatrix}=\sum_i a_{ii}|X|=|X|\operatorname{tr}A.$$

对此式积分就得到(36.2)。

由(36.2)可直接得出下述事实：在 t 的某个值，$|X(t)|=0$ 若不成立，则 t 的所有值 $|X(t)|\neq 0$。

如果存在不全为零的常数(标量) $c_1, c_2, \cdots, c_m$，使得 m 个向量 $x^1, x^2, \cdots, x^m$ 在 t 的所有值有

$$c_1x^1+c_2x^2+\cdots+c_mx^m\equiv 0$$

成立，则这 m 个向量作成一个綫性相关組；否則就說它們是綫性无关的。

現在考虑齐次方程的 n 个解为 $x^1, x^2, \cdots, x^n$ 的情况。因为

$$(c_1x^1+c_2x^2+\cdots+c_nx^n)_i=\sum_{k=1}^n c_kx_{ik},$$

所以

$$\sum_{k=1}^n c_kx^k=0$$

与

$$\sum_{k=1}^n c_kx_{ik}=0\quad (i=1, 2, \cdots, n)$$

是等价的。設 $t=t_1$(任意一个常数)，則这一方程組就是初等代数方程組，因而由众所熟知的定理，使得不全为零的 c_k 存在的充分必要条件是系数行列式 $|X(t_1)|=0$。然而由上已知，在 t 的一个值如果 $|X|$ 为零，則在所有 t 的值 $|X|$ 必是零。是以如果 n 个解

向量所作的 Wronskian 行列式至少对于 t 的某个值不为零时，这 n 个解向量才成为綫性无关組。这样的一組解叫作解的**基本組**(fundamental system)，或称基础解系。

特别在 $t=t_0$ 时初值为

$$X(t_0)=\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 \end{pmatrix}=E,\quad |X(t_0)|=1$$

的无关組叫作解的**标准組** (normal system)。如将这一标准系記为 $y^1, y^2, \cdots, y^n$，則滿足初始条件($t=t_0$ 时 $x=a$)的解可写成

$$x=a_1y^1+a_2y^2+\cdots+a_ny^n\ (=Ya)\text{❶},$$

---

❶ 依假設 $\dfrac{dy^k}{dt}=Ay^k\quad(1\leqslant k\leqslant n)$，由于 a_k 为常数，故

$$\frac{da_ky^k}{dt}=Aa_ky^k\quad(1\leqslant k\leqslant n),$$

因之
$$\frac{d}{dt}\left(\sum_{k=1}^n a_ky^k\right)=A\left(\sum_{k=1}^n a_ky^k\right).$$

令 $x=\sum\limits_{k=1}^n a_ky^k$，则 $\dfrac{dx}{dt}=Ax$。

又当 $t=t_0$ 时，$y^k=\begin{pmatrix}0\\0\\ \vdots\\1\\ \vdots\end{pmatrix}$，此处 1 为列向量中第 k 个元素，从而

$$a_ky^k=\begin{pmatrix}0\\0\\ \vdots\\a_k\\ \vdots\\0\end{pmatrix}，隨之，x=\sum_{k=1}^n a_ky^k=\begin{pmatrix}a_1\\a_2\\ \vdots\\a_n\end{pmatrix}=a,$$

再依解之唯一性定理即得。——譯者注

Y 是由这一标准組所作的解矩陣。

若以常数矩陣变換 C 右乘此解矩陣 Y 所得矩陣为 Z，则

$$Z=YC, \quad |Y|=1$$

满足矩陣方程(36.1)。显然，由下一关系

$$|Z|=|Y|\cdot|C|=|C|,$$

如果变換矩陣 C 是非奇异的($|C|\neq 0$)，则 $z^1, z^2, \cdots, z^n$(z^i 是作为 Z 的第 i 列的分量的向量)就作成解的基本組。反之，命 $C^{-1}=B$，就有 $ZB=Y$ ($|B|\neq 0$)。因而可知，任意基本組是經由綫性变換与标准組互相連系着的❶。

注意 (1) 用同一个基本組表示任意的解时，不会有两种不同的表示法。理由是：如果有

$$x=\sum_{i=1}^{n} c_i x^i=\sum_{i=1}^{n} d_i x^i,$$

就应有

$$\sum_{i=1}^{n}(c_i-d_i)x^i=0.$$

由綫性无关性质，所以 $c_i-d_i=0 \quad (i=1, 2, \cdots, n)$。

(2) 在 A 是常数矩陣的情况下，由(35.4)可知，(36.1)的满足初始条

---

❶ 因 Z 为基础解系 Z^k ($1\leqslant k\leqslant n$)所作的解矩陣，则当 $t=t_0$ 时，$|Z(t_0)|\neq 0$。但依前述

$$Z^k=a_{1k}y^1+a_{2k}y^2+\cdots+a_{nk}y^n,$$

此处 $y^1, y^2, \cdots, y^n$ 为解之标准組。而 $y^i=\begin{pmatrix} y_{1i} \\ \vdots \\ y_{ni}\end{pmatrix}$，故

$$Z^k=\begin{pmatrix} a_{1k}\,y_{11} \\ \vdots \\ a_{1k}y_{n1}\end{pmatrix}+\cdots+\begin{pmatrix} a_{nk}\,y_{1n} \\ \vdots \\ a_{nk}\,y_{nn}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix} a_{1k}\,y_{11}+\cdots+a_{nk}\,y_{1n} \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ a_{1k}\,y_{n1}+\cdots+a_{nk}\,y_{nn}\end{pmatrix},$$

从而

$$Z=\begin{pmatrix} a_{11}y_{11}+\cdots+a_{n1}y_{1n} & \cdots & a_{1n}y_{11}+\cdots+a_{nn}y_{1n} \\ \cdots\cdots\cdots\cdots & \cdots & \cdots\cdots\cdots\cdots \\ a_{11}y_{n1}+\cdots+a_{n1}y_{nn} & \cdots & a_{1n}y_{n1}+\cdots+a_{nn}y_{nn}\end{pmatrix}=YC,$$

此处 $C=Z(t_0)=(a_{ij})$，因 $|C|\neq 0$，故 $\exists C^{-1}=B$，于是

$ZB=y$. —— 譯者注

件($t=t_0$ 时 $X=X^0$)的解就是

$$X=e^{(t-t_0)A}X^0,\quad X^0=X(t_0)\text{[1]},$$

(3) 在非齐次方程 (33.1) 或 (33.2) 的解中，满足初始条件 ($t=t_0$ 时 $x=a$)的解是

$$x=a_1y^1+a_2y^2+\cdots+a_ny^n+z,$$

此处 $y^1, y^2, \cdots, y^n$ 是标准組，z 是 $z(t_0)=0$ 这样的特解(称之为零解)[2]。

§37 共 軛 組

对于矩陣微分方程(36.1)

$$\frac{dY}{dt}=Y(-A)\left(\frac{dy}{dt}=y(-A)\right)\text{[3]} \tag{37.1}$$

叫做共軛組(adjoint system)。

由(36.1)，(37.1)可直接得到

$$Y\frac{dX}{dt}+\frac{dY}{dt}X=Y(AX)+(-YA)X=0,$$

即 $d(YX)=0$ 或 $YX=C$ (常数矩陣)。特別，設 $C=E$，就有 $YX=E$。

由这一事实可知，只要給出共軛組的解的基本系 Y，任取一个任意常数的矩陣 C，在 C 是非奇异的条件之下，$X=Y^{-1}C$ 也是这个原来方程組的基本組[4]。反之，(36.1) 的解的任一基本組都可以表示为 $Y^{-1}C$ 的形式[5]。当 A 为常数时，由前节注意(2)可知，这里 Y^{-1} 使得

---

[1] 將 $\frac{dX}{dt}=AX$ 中第 k 列看做是(33.1)即可引用(35.4)。——譯者注

[2] 直接驗明此处 x 为(33.1) 也即 (33.2) 之解而滿足初始条件。再依解之唯一性定理即得。——譯者注

[3] 此处矩陣乘法定义应与 (36.1) 处有所区别，此处是以行乘列，而后者是以列乘行。——譯者注

[4] 即指(36.1)。——譯者注

[5] 見本节下文中注意。——譯者注

$$Y^{-1}\quad e^{(t-t_0)A},$$

而一般情况，由(35.2)可知

$$Y^{-1}=\left[E-\int_{t_0}^{t}\Gamma(t,\ \tau)d\tau\right].$$

注意　設 X 为(36.1)的解的一个基本組，则滿足 $YX=C$（任意常数矩陣）的 Y 就是共轭組解矩陣。理由是

$$Y\frac{dX}{dt}+\frac{dY}{dt}X=YAX+\frac{dY}{dt}X=0,$$

即

$$\left(YA+\frac{dY}{dt}\right)X=0,\quad |X|\neq 0,$$

所以

$$YA+\frac{dY}{dt}=0.$$

考慮到(36.1)，(37.1)的轉置矩陣，就有

$$\frac{dX'}{dt}=X'A',\quad \frac{dY'}{dt}=-A'Y'❶.$$

因而(36.1)的轉置矩陣就是(37.1)的轉置矩陣的共軛方程(相反性)。

特別是 $-A'=A$ 这样的方程叫做**自共軛組**。此时，A 的 $(i,\ k)$ 元素滿足 $a_{ik}+a_{ki}=0$。这就是說 A 是斜对称的(skew-symmetric)。这时有

$$\frac{dX'}{dt}=X'(-A),\quad \frac{dY'}{dt}=AY'.$$

§38　常数变易法❷

常数变易法是求非齐次型方程(33.2)的特解的一种方法。設齐次型方程

---

❶ 因 $\left(\frac{dX}{dt}\right)'=\frac{dX'}{dt}$，$(XY)'=Y'X'$。——譯者注

❷ 就是通称的 Lagrange 常数变易法。——校者注

$$\frac{dX}{dt}=AX$$

的解的基本組的一个是 Y. 我們来求(33.2)的形如

$$x=Y\cdot c(t),\quad |Y|\neq 0$$

的解, $c(t)$是列向量。把它代入(33.2)就得到

$$\frac{dY}{dt}c(t)+Y\frac{dc(t)}{dt}=AYc(t)+f.$$

又因 $\frac{dY}{dt}=AY$, 所以

$$Y\frac{dc}{dt}=f \text{ 或 } \frac{dc}{dt}=Y^{-1}f.$$

积分这一結果就得到

$$c(t)=c(t_0)+\int_{t_0}^{t}Y^{-1}(\tau)f(\tau)d\tau.$$

因而(33.2)的解就是

$$x=Y(t)c(t_0)+\int_{t_0}^{t}Y(t)Y^{-1}(\tau)f(\tau)d\tau. \tag{38.1}$$

(38.1)右端的积分項

$$\int_{t_0}^{t}Y(t)Y^{-1}(\tau)f(\tau)d\tau$$

是(33.2)的特解。由于 $c(t_0)$ 是任意常向量,所以(38.1)是(33.2)的通解。

如果取矩陣微分方程

$$\frac{dX}{dt}=AX+F$$

代替(33.2), 显然这一特解就是

$$\int_{t_0}^{t}Y(t)Y^{-1}(\tau)F(\tau)d\tau ❶.$$

---

❶ 将上述的 $x=Yc(t)$ 中列向量 x, $c(t)$ 易为矩陣 X, $C(t)$,然后根据所述平行地推导,即可得出此結果。——譯者注

注意　当 A 是常数时，$Y(t-\tau)$是齐次型方程

$$\frac{dX}{dt}=AX$$

的在 $t=\tau$ 时取值 $Y(0)$ 为初值的解❶。今若将 y 取为标准組，就有 $Y(0)=E$。另一方面，設在 $t=\tau$ 时取值 E 的解是 $Y(t)C$，于是 $Y(\tau)C=E$；因而这一解就是 $Y(t)Y^{-1}(\tau)$。由解的唯一性，必然得到

$$Y(t)Y^{-1}(\tau)=Y(t-\tau),$$

从而在这一情况下的特解就是

$$\int_{t_0}^{t}Y(t-\tau)F(\tau)d\tau,$$

然而由(35.4)可知 $Y(t)=e^{tA}$。因此上一特解可写为

$$\int_{t_0}^{t}e^{A(t-\tau)}F(\tau)d\tau,$$

显然它就是(35.3)的形式了❷。

注意　利用共軛組

$$\frac{dY}{dt}=-YA$$

也可以得到特解❸。理由是：由于

$$Y\frac{dX}{dt}+\frac{dY}{dt}X=YF\quad \text{即}\ \frac{d}{dt}(YX)=YF,$$

积分这一結果就得到

$$YX=C+\int_{t_0}^{t}Y(\tau)F(\tau)d\tau,$$

$$X=Y^{-1}(t)C+\int_{t_0}^{t}Y^{-1}(t)Y(\tau)F(\tau)d\tau.$$

§39　ε-近　似　解

当 $A(t)=C+B(t)$ 时，也就是我們要討論的齐次方程写为

---

❶　此处 $Y(t)$ 仍是本节所假設的，作为齐次方程 $\frac{dX}{dt}=AX$ 的解的基本組。至于証明 $Y(t-\tau)$ 为此齐次方程之解，可直接代入方程，而利用

$$\frac{d(Y(t-\tau))}{dt}=\frac{d(Y(t-\tau))}{d(t-\tau)}\cdot\frac{d(t-\tau)}{dt}.\text{——譯者注}$$

❷　确切地說，这是(35.3)中 $x(t_0)$ 为零向量的一个特殊情况。——譯者注

❸　即指 $\frac{dX}{dt}=AX+F$ 的特解說的。——譯者注

$$\frac{dx}{dt}=Ax=Cx+B(t)x \tag{39.1}$$

时，我們对它的解与常系数方程

$$\frac{dy}{dt}=Cy \tag{39.2}$$

的解进行比較。今設两者滿足同一初始条件(在 $t=t_0$ 时 $x=y=a$)，則

$$\frac{d}{dt}(x-y)=C(x-y)+Bx,$$

对于这一結果与(39.1)应用基本不等式(34.5)，就有

$$\|x(t)-y(t)\|\leqslant\int_{t_0}^{t}e^{M_C(t-\tau)}\|Bx(\tau)\|d\tau$$

$$\leqslant e^{M_C(t-t_0)}\int_{t_0}^{t}M_B(\tau)\|x(\tau)\|d\tau,$$

此处 M_C 是矩陣 C 的上限值(常数)❶而且

---

❶ 設 $A=(a_{ik})$，作 $\max\limits_{k}\sum\limits_{i=1}^{n}|a_{ik}|=H$，則

$$H=M_A.$$

[証] 任設向量 x，則

$$\begin{aligned}\|Ax\|&=|a_{11}x_1+\cdots+a_{1n}x_n|+\cdots+|a_{n1}x_1+\cdots+a_{nn}x_n|\\&\leqslant|a_{11}||x_1|+\cdots+|a_{1n}||x_n|+\cdots+|a_{n1}||x_1|+\cdots+|a_{nn}||x_n|\\&=(|a_{11}|+\cdots+|a_{n1}|)|x_1|+\cdots+(|a_{1n}|+\cdots+|a_{nn}|)|x_n|\\&\leqslant H|x_1|+\cdots+H|x_n|=H\|x\|.\end{aligned}$$

因此，

$$M_A\leqslant H.$$

任取 M 使得对于每个范为1的向量 x

$$\|AX\|\leqslant M,$$

則

$$|a_{11}x_1+\cdots+a_{1n}x_n|+\cdots+|a_{n1}x_1+\cdots+a_{nn}x_n|\leqslant M,$$

因而当 $x=\begin{pmatrix}1\\0\\\vdots\\0\end{pmatrix}$ 时，則 $|a_{11}|+\cdots+|a_{n1}|\leqslant M$，仿此可証

$$|a_{1n}|+\cdots+|a_{nn}|\leqslant M,$$

所以 $H\leqslant M$，但此 M 是任意的，于是

$$H\leqslant M_A.$$ —— 譯者注

$$|M_B - M_C| \leqslant M_A \leqslant M_B + M_C$$ ❶,

$$\|x(t)\| \leqslant \|x(t_0)\| \exp\left(\int_{t_0}^{t} M_A(\tau)d\tau\right).$$

因而

$$\|x(t) - y(t)\| \leqslant \|a\| e^{2M_C(t-t_0)} \int_{t_0}^{t} M_B(\tau) \exp\left(\int_{t_0}^{\tau} M_B(\tau')d\tau'\right) d\tau$$

$$= \|a\| e^{2M_C(t-t_0)} \left[\exp\left(\int_{t_0}^{t} M_B(\tau)d\tau\right) - 1\right]$$

$$\leqslant \|a\| e^{2M_C(t-t_0)} [e^{M(t-t_0)} - 1], \quad M = \max M_B(t).$$

由此可求

$$\|x(t) - y(t)\| < \varepsilon, \quad t_0 \leqslant t \leqslant t_1 = t_1(a, M)$$

成立的时間区間 $t_1 - t_0$。这一結果可表达为：从同一点出发的 (39.1), (39.2) 的解，經过时間 $t_1 - t_0$，彼此間恒保持在 ε-距离内；特别是，由于 $x = 0$ 是平衡点，出发点越靠近平衡点（$\|a\|$越小），M_B 也越小，則經过長久的时間，两解彼此間保持在 ε-距离。然而 (39.2) 的解是 $e^{C(t-t_0)}x(t_0)$，因而在时間 (t_0, t_1) 内 (39.1) 的解可以近似地写为 $e^{C(t-t_0)}x(t_0)$。

注意 (1) 在力学系里，从 (34.5) 可知，纵然 $M(t)$ 不是有界的，只要

---

❶ 設 A, B, C 为矩陣，$A = B + C$，則

$$M_A \leqslant M_B + M_C, \quad |M_B - M_C| \leqslant M_A.$$

〔証〕 因 $\|BX\| \leqslant M_B\|X\|$，$\|CX\| \leqslant M_C\|X\|$，故

$$\|BX\| + \|CX\| \leqslant (M_B + M_C)\|X\|,$$

但

$$\|AX\| \leqslant \|BX\| + \|CX\|,$$

所以

$$\|AX\| \leqslant (M_B + M_C)\|X\|,$$

因之

$$M_A \leqslant M_B + M_C.$$

又由假設，可知 $B = A - C = A + (-C)$，故由上可知

$$M_B \leqslant M_A + M_{-C},$$

而 $M_{-C} = M_C$，則 $M_B \leqslant M_A + M_C$，故

$$M_B - M_C \leqslant M_A.$$

类似地可証

$$M_C - M_B \leqslant M_A.$$ ——譯者注

$$\int_{t_0}^{\infty} M_A(t)dt < \infty \text{ ❶},$$

$x(t)$ 也就是解的軌道存在于有界領域內。并且还可以取

$$\int_{t_0}^{\infty} |a_{ik}(t)|dt < \infty \text{ ❷} \quad (i, k=1, 2, \cdots, n)$$

作为达到此目的的条件❸。

(2) 当我們考虑某一特定时間点 t_0 邻域时，如果将 $A(t)$ 写成

$$A(t) = A(t_0) + (t-t_0)\frac{d}{dt}A(t_0) + \cdots = A(t_0) + B(t),$$

就可以应用本节所討論的結果了。又当

$$A(t) = C + \mu B(t) \quad (\mu \text{ 是参数})$$

时，如果 μ 充分小，仍可应用本节所討論的結果。

---

❶ 因 $M(t) = \int_{t_0}^{t} H(\tau)d\tau$，而 $\max\limits_{k}\sum\limits_{i=1}^{n}|a_{ik}(\tau)| = H(\tau)$，又 $H(\tau) = M_A(\tau)$（見第127頁注❶），故

$$M(t) = \int_{t_0}^{t} M_A(\tau)d\tau,$$

于是

$$\lim_{t\to\infty} M(t) = \int_{t_0}^{\infty} M_A(\tau)d\tau,$$

从而 $M(t)$ 当 $t\to\infty$ 有界。此条件較 $M(t)$ 有界为弱。但此較弱条件也足够了。

——譯者注

❷ 讀者可进一步参考 В. А. Якубович, Б. П. Демидович 和 N. Levinson 等人的結果。这些結果在張学銘等：微分方程稳定性理論讲义，第二章中有較詳細的介紹。——校者注

❸ 設 $A = (a_{ik})$，則

$$\int_{t_0}^{\infty} M_A(t)dt < \infty \rightleftarrows \int_{t_0}^{\infty} |a_{ik}(t)|dt < \infty \quad (i, k=1, 2, \cdots, n).$$

[証] $(\longrightarrow)$ 因 $M_A = \max\limits_{k}\sum\limits_{i=1}^{n}|a_{ik}(t)|$（参見第127頁注❶），故每个

$$|a_{ik}(t)| \leqslant M_A(t), \text{ 从而 } \int_{t_0}^{\infty}|a_{ik}(t)|dt < \infty.$$

$(\longleftarrow)$ 因

$$\int_{t_0}^{\infty}\sum_{i=1}^{n}|a_{ik}|dt = \sum_{i=1}^{n}\int_{t_0}^{\infty}|a_{ik}(t)|dt < \infty \quad (k=1, 2, \cdots, n),$$

故

$$\int_{t_0}^{\infty} M_A(t)dt < \infty. \text{ ——譯者注}$$

第 5 章　常系数的情况

§ 40　常系数方程組

設我們所考慮的方程为

$$\frac{dx}{dt}=Ax \text{ 或 } \frac{dX}{dt}=AX. \tag{40.1}$$

用非奇异变換

$$X=KY, \ |K|\neq 0$$

变換(40.1)就得到

$$\frac{dX}{dt}=\frac{dK}{dt}Y+K\frac{dY}{dt}=AKY$$

或

$$\frac{dY}{dt}=\left(K^{-1}AK-K^{-1}\frac{dK}{dt}\right)Y.$$

这就是說，微分方程(40.1)在經过一个綫性变换之后，仍变成一个同形式的方程 $\frac{dY}{dt}=BY$. 特别当 K 是常数矩陣时 $B=K^{-1}AK$. 在特殊情况下，纵然 K 不是常数，B 也有可能成为常数矩陣。关于这一事实將在下一节叙述❶。

在本节內我們設 A 是常数矩陣。由矩陣論中的主要定理之一的 Jordan 标准型分解定理，如果选得一个适当的矩陣 K，$K^{-1}AK$ 可以表为具有形式

$$B=\begin{pmatrix} \lambda & 1 & 0 & \cdots & 0 & 0\\ 0 & \lambda & 1 & \cdots & 0 & 0\\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots\\ 0 & 0 & 0 & \cdots & \lambda & 1\\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & \lambda \end{pmatrix} \tag{40.2}$$

❶ 見第 6 章 § 42～43。——譯者注

矩陣的直接和❶。将 B 改写为

$$B=\lambda E+Z, \text{此处 } Z=\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \cdots & 0 & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

而且为方便計，設 B 为 n 阶方陣，显然有

$$Z^n=0.$$

因此

$$B^m=\lambda^m E+\binom{m}{1}\lambda^{m-1}Z+\binom{m}{2}\lambda^{m-2}Z^2+\cdots$$

$$+\binom{m}{n-1}\lambda^{m-n+1}Z^{n-1}❷,$$

从而

$$\begin{aligned} f(B)&=c_0E+c_1B+c_2B^2+\cdots \\ &=\left(\sum_m c_m\lambda^m\right)E+\left(\sum_m c_m\binom{m}{1}\lambda^{m-1}\right)Z \\ &\quad+\left(\sum_m c_m\binom{m}{2}\lambda^{m-2}\right)Z^2+\cdots+\left(\sum_m c_m\binom{m}{n-1}\lambda^{m-n+1}\right)Z^{n-1} \\ &=f(\lambda)E+\frac{1}{1!}f'(\lambda)Z+\frac{1}{2!}f''(\lambda)Z^2+\cdots \\ &\quad+\frac{1}{(n-1)!}f^{(n-1)}(\lambda)Z^{n-1} \end{aligned}$$

$$=\begin{pmatrix} f(\lambda) & \frac{1}{1!}f'(\lambda) & \frac{1}{2!}f''(\lambda) & \cdots & \frac{1}{(n-1)!}f^{(n-1)}(\lambda) \\ & f(\lambda) & \frac{1}{1!}f'(\lambda) & \cdots & \frac{1}{(n-2)!}f^{(n-2)}(\lambda) \\ & & f(\lambda) & \cdots & \\ 0 & & & \cdots\cdots & \\ & & & & f(\lambda) \end{pmatrix}$$

---

❶ Jordan 标准型分解定理詳見本节最后。設 $B_1, B_2, \cdots, B_l$ 均为矩陣，作 $B=\mathrm{diag}(B_1, \cdots, B_l)$，依定义，称 B 为 $B_1, \cdots, B_l$ 之直接和或对角和。——譯者注

❷ 注意利用 $Z^n=0$.——譯者注

因此$f(B)$的行列式就是

$$|f(B)|=[f(\lambda)]^n.$$

另一方面,微分方程

$$\frac{dY}{dt}=BY$$

的解的标准組可以写成$Y=e^{B(t-t_0)}E$❶,因而对于(40.2)的B

$$Y=\begin{pmatrix} e^{\lambda(t-t_0)} & \frac{t-t_0}{1!}e^{\lambda(t-t_0)} & \frac{(t-t_0)^2}{2!}e^{\lambda(t-t_0)} & \cdots & \frac{(t-t_0)^{n-1}}{(n-1)!}e^{\lambda(t-t_0)} \\ & e^{\lambda(t-t_0)} & \frac{t-t_0}{1!}e^{\lambda(t-t_0)} & \cdots & \frac{(t-t_0)^{n-2}}{(n-2)!}e^{\lambda(t-t_0)} \\ & & e^{\lambda(t-t_0)} & \cdots & \\ 0 & & & \cdots\cdots & \\ & & & & e^{\lambda(t-t_0)} \end{pmatrix} \text{❷} \quad (40.3)$$

从而　　　　　　　　$|Y|=e^{n\lambda(t-t_0)}$.

其次,当B是对角矩陣,即

$$B=\begin{pmatrix} \lambda_1 & & & & \\ & \lambda_2 & & & \\ & & \lambda_3 & & \\ & & & \ddots & \\ & & & & \lambda_n \end{pmatrix} \text{❸} =(\lambda_i\delta_{ik}) \text{❹} \qquad (40.4)$$

时,就有$B^m=(\lambda_i^m\delta_{ik})$,因而

$$c_0E+c_1B+c_2B^2+\cdots=((c_0+c_1\lambda_i+c_2\lambda_i^2+\cdots)\delta_{ik}) \text{❺},$$

即　　$f(B)=(f(\lambda_i)\delta_{ik})=\operatorname{diag}(f(\lambda_1),f(\lambda_2),\cdots,f(\lambda_n))$.

---

❶ 見第4章§36注意(2)。——譯者注

❷ 参照§35中关于$e^{\lambda A}$的定义,以及本节$f(B)$的結果即可得知。——譯者注

❸ 亦常写作$\operatorname{diag}(\lambda_1,\lambda_2,\cdots,\lambda_n)$.——原书注

❹ 此处δ_{ik}是所謂Kronecker符号,其意义为$\delta_{ik}=\begin{cases}0 & \text{当 } i\neq k\\ 1 & \text{当 } i=k\end{cases}$.——譯者注

❺ $B=\operatorname{diag}(\lambda_1,\lambda_2,\cdots,\lambda_n)\to B^2=\operatorname{diag}(\lambda_1^2,\lambda_2^2,\cdots,\lambda_n^2)$;$B=\operatorname{diag}(\lambda_1,\cdots,\lambda_n)$,$A=\operatorname{diag}(\mu_1,\cdots,\mu_n)\Rightarrow B+A=\operatorname{diag}(\lambda_1+\mu_1,\cdots,\lambda_n+\mu_n)$.——譯者注

从而此刻的解就是(設 $t_0=0$)

$$Y=\mathrm{diag}(e^{\lambda_1 t},\ e^{\lambda_2 t},\ e^{\lambda_3 t},\ \cdots,\ e^{\lambda_n t}),\quad |Y|=e^{\Sigma\lambda_i t}\text{❶}.$$

同样地可以写出

$$\mathrm{diag}(B_1,\ B_2)=\left(\begin{array}{c|c} B_1 & \\ \hline & B_2\end{array}\right).$$

这是一个 B_1, B_2 分别表示矩陣,而其他元素全都是零的矩陣。更可将这一形式推广到一般的形式:

$$\mathrm{diag}(B_1,\ B_2,\cdots,\ B_r)=\begin{pmatrix} B_1 & & & & \\ & B_2 & & & \\ & & B_3 & & \\ & & & \ddots & \\ & & & & B_r\end{pmatrix}.$$

特别当 $B=\mathrm{diag}(B_1,\ B_2,\ \cdots,\ B_r)$ 时,易知

$$B^m=\mathrm{diag}(B_1^m,\ B_2^m,\ \cdots,\ B_r^m),$$

从而

$$f(B)=\mathrm{diag}(f(B_1),f(B_2),\ \cdots,\ f(B_r)),$$

$$e^{tB}=\mathrm{diag}(e^{tB_1},\ e^{tB_2},\ \cdots,e^{tB_r}).$$

以下将 B 改为 Jordan 标准型而进行討論。在此預先正确掌握这一形式的內容是必要的,因此将其內容陈述如下。設

$$\begin{pmatrix}\dfrac{dx_1}{dt}\\ \dfrac{dx_2}{dt}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}a_{11}x_1+a_{12}x_2\\ a_{21}x_1+a_{22}x_2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}a_{11} & a_{12}\\ a_{21} & a_{22}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x_1\\ x_2\end{pmatrix}\tag{40.5}$$

的解为 $x_1=A_1e^{\lambda t}$, $x_2=A_2e^{\lambda t}$, 则 A_1, A_2 满足

$$\begin{cases}(a_{11}-\lambda)A_1+a_{12}A_2=0,\\ a_{21}A_1+(a_{22}-\lambda)A_2=0.\end{cases}\tag{40.6}$$

---

❶ 因 $y=e^{B(t-t_0)}E=e^{Bt}E=E+\dfrac{tB}{1!}+\dfrac{t^2B^2}{2!}+\dfrac{t^3B^3}{3!}+\dfrac{t^4B^4}{4!}+\cdots$

$=f(B)=\mathrm{diag}(f(\lambda_1),\ \cdots,\ f(\lambda_n))$,

而 $$f(\lambda_i)=1+t\lambda_i+\frac{t^2\lambda_i^2}{2!}+\frac{t^3\lambda_i^3}{3!}+\frac{t^4\lambda_i^4}{4!}+\cdots=e^{\lambda_i t},$$

故 $$y=\mathrm{diag}(e^{\lambda_1 t},\ e^{\lambda_2 t},\ \cdots,\ e^{\lambda_n t}).$$——譯者注

为了有 A_1、A_2 之存在❶，λ 必须是特征方程

$$f(\lambda)=\begin{vmatrix} a_{11}-\lambda & a_{12} \\ a_{21} & a_{22}-\lambda \end{vmatrix}=\lambda^2-(a_{11}+a_{22})\lambda+(a_{11}a_{22}-a_{12}a_{21})=0$$

的根。因而当这一方程有两个相异的根 λ_1, λ_2 时，解向量呈如下形式：

$$x=\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} A_{11} \\ A_{21} \end{pmatrix}e^{\lambda_1 t} \text{ 及 } x=\begin{pmatrix} A_{12} \\ A_{22} \end{pmatrix}e^{\lambda_2 t}. \tag{40.7}$$

在此 A_{ij} 可由(40.6)来求得：

$$(a_{11}-\lambda_i)A_{1i}+a_{12}A_{2i}=0 \quad (i=1, 2).$$

当 $\lambda_1=\lambda_2$ (等根的情况)时，将

$$x_i=e^{\lambda_1 t}(A_i t+B_i) \quad (i=1, 2)$$

代入(40.5)❷就有

$$\begin{cases}(a_{11}-\lambda_1)A_1+a_{12}A_2=0, \\ a_{21}A_1+(a_{22}-\lambda_1)A_2=0,\end{cases}$$

$$\begin{cases}(a_{11}-\lambda_1)B_1+a_{12}B_2=A_1, \\ a_{21}B_1+(a_{22}-\lambda_1)B_2=A_2.\end{cases}$$

现在，特别考虑 $a_{12}=a_{21}=0$ 的情况。此时，就有 $\lambda_1=a_{11}=a_{22}$，从而原方程組在外观上是方程組，而实质上就是一个单一方程了（但是作为力学系来說它表示直綫軌道）❸。因而一般設 $a_{12}\neq 0$，由上面的方程得到

---

❶ 所謂 A_1, A_2 存在，即是說 $A_1\neq 0$, $A_2\neq 0$.——譯者注

❷ 代入(40.5)后，把所得到的等式看成是关于 t 的恒等式，即得以下两个方程組。——譯者注

❸ 因

$$\begin{vmatrix} a_{11}-\lambda & a_{12} \\ a_{21} & a_{22}-\lambda \end{vmatrix}=(a_{11}-\lambda)(a_{22}-\lambda)-a_{12}a_{21},$$

故当 $a_{12}=0$ 及 $a_{21}=0$ 时，則必 $\lambda=a_{11}$, $\lambda=a_{22}$，但在 λ 是等根情形下，$a_{11}=a_{22}$，从而(40.5)成为

$$\begin{pmatrix} \frac{dx_1}{dt} \\ \frac{dx_2}{dt} \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} a_{11}x_1 \\ a_{22}x_2 \end{pmatrix},$$

它实际上是一个单一方程。——譯者注

$$A_2=\frac{\lambda_1-a_{11}}{a_{12}}A_1,\quad B_2=\frac{\lambda_1-a_{11}}{a_{12}}B_1+\frac{A_1}{a_{12}}\text{❶},$$

因而

$$\begin{cases}x_1=e^{\lambda_1 t}(A_1t+B_1),\\ x_2=e^{\lambda_1 t}\left(\frac{\lambda_1-a_{11}}{a_{12}}(A_1t+B_1)+\frac{A_1}{a_{12}}\right),\end{cases}$$

此处 A_1, B_1 是任意常数。

以下换一个方法，考虑变换

$$y=k_1x_1+k_2x_2,\quad \frac{dy}{dt}=\lambda y.$$

改写上式，由(40.5)就得到

$$k_1(a_{11}x_1+a_{12}x_2)+k_2(a_{21}x_1+a_{22}x_2)-\lambda(k_1x_1+k_2x_2)=0.$$

由此，若命 x_1, x_2 的系数为 0❷（由初始条件可考虑到 x_1, x_2 的任意性）就得

$$\begin{cases}(a_{11}-\lambda)k_1+a_{21}k_2=0,\\ a_{12}k_1+(a_{22}-\lambda)k_2=0.\end{cases}\tag{40.8}$$

作为 k_1, k_2 的存在条件就是

$$\begin{vmatrix}a_{11}-\lambda & a_{21}\\ a_{12} & a_{22}-\lambda\end{vmatrix}=\lambda^2-(a_{11}+a_{22})\lambda+(a_{11}a_{22}-a_{12}a_{21})=0.\tag{40.9}$$

上式同于矩陣 (a_{ij}) 的特征方程。

今設方程有相异的二根 λ_1, λ_2，对应于 $\lambda=\lambda_i$ 由(40.8)就得到

$$k_1=k_{i1},\quad k_2=k_{i2}.$$

这一結果如以矩陣的形式来表示，有如下形式：把原方程(40.5)：

$$\begin{pmatrix}\frac{dx_1}{dt}\\ \frac{dx_2}{dt}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}a_{11} & a_{12}\\ a_{21} & a_{22}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x_1\\ x_2\end{pmatrix}$$

---

❶ 此处 A_2 是从上面第一个方程組中第一个方程解出来的；在利用

$$\begin{vmatrix}a_{11}-\lambda & a_{12}\\ a_{21} & a_{22}-\lambda\end{vmatrix}=0$$

之后，可知 A_2 从其中第二个方程解出来的結果与此一致。

同样，可考慮此处 B_2 的結果，但尚須利用 $2\lambda_1=a_{11}+a_{22}$——由于此时 $f(\lambda)=0$ 有等根 λ_1 的緣故。——譯者注

❷ 此处所說的 x_1, x_2 的系数是指上方程中按 x_1, x_2 分別集項所得到的系数。——譯者注

用

$$\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} k_{11} & k_{12} \\ k_{21} & k_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$$

加以变换之后，就得到

$$\begin{pmatrix} \frac{dy_1}{dt} \\ \frac{dy_2}{dt} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix}.$$

y_1, y_2 作成一个綫性无关組。这是因为，如果設

$$c_1 y_1 + c_2 y_2 = 0$$

就有

$$c_1 \lambda_1 y_1 + c_2 \lambda_2 y_2 = 0 \text{❶},$$

从而，由于 $\lambda_1 \neq \lambda_2$，就非有 $c_1 = c_2 = 0$ 不可。

其次，在特征方程(40.9)有等根的情况下，即 $\lambda_1 = \lambda_2$ 时，则

$$\lambda_1 = \frac{a_{11} + a_{22}}{2}.$$

特别当 $a_{12} = a_{21} = 0$ 时 $\lambda_1 = a_{11} = a_{22}$，因此这时原方程(40.5)就取下面的形式：

$$\begin{pmatrix} \frac{dx_1}{dt} \\ \frac{dx_2}{dt} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}.$$

以下为了方便，再設 $a_{21} \neq 0$，由(40.8)可以写出

$$k_1 = a_{21}, \qquad k_2 = \lambda_1 - a_{11}.$$

从而有

$$\frac{dy_1}{dt} = \lambda_1 y_1, \quad y_1 = a_{21} x_1 + (\lambda_1 - a_{11}) x_2.$$

在这一情况下，如果选 $y_2 = x_2$，则由(40.5)的第二式得到

$$\frac{dx_2}{dt} = \frac{dy_2}{dt} = a_{21} x_1 + a_{22} y_2 = y_1 - (\lambda_1 - a_{11}) x_2 + a_{22} y_2$$

$$= y_1 - (\lambda_1 - a_{11} - a_{22}) y_2 = y_1 + \lambda_1 y_2.$$

总而言之，在等根的情况下，由变换

---

❶ 因 $c_1 y_1 + c_2 y_2 = 0$，故 $c_1 \frac{dy_1}{dt} + c_2 \frac{dy_2}{dt} = 0$，但 $\frac{dy_1}{dt} = \lambda_1 y_1$，$\frac{dy_2}{dt} = \lambda_2 y_2$，将此两式代入上式即得。——譯者注

$$\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{21} & \lambda_1 - a_{11} \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix},$$

(40.5) 可化成

$$\begin{pmatrix} \frac{dy_1}{dt} \\ \frac{dy_2}{dt} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 1 & \lambda_1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix}.$$

y_1, y_2 作成綫性无关組这一事实用下述方法容易得証：如設 $y_2 = cy_1$，則有

$$\frac{dy_2}{dt} = c\lambda_1 y_1 = y_1 + c\lambda_1 y_1 .$$

綜合以上可叙述为：

对于方程組 $\frac{dx}{dt} = Ax$ 实施适当的变换 $y = Kx$，就得到 $\frac{dy}{dt} = By$，B 取下列形式

$$\begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_1 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 1 & \lambda_1 \end{pmatrix}$$

的任何一个。

把上述結果用矩陣的初等因子論[1]系統化起来，使之成为一般性的命題的，就是 Jordan 定理：任意方陣 A 可以經由一个适当的方陣 K ($|K| \neq 0$) 化为 $K^{-1}AK = B = \mathrm{diag}(B_1, B_2, \cdots, B_l)$。此处 B_i 是如下形式的矩陣的对角矩陣（直接和）：

---

[1] 初等因子理論于十九世紀末叶为 Weierstrass, Sylvester 所开始。依据它，可得出矩陣种种的典型式，此处 Jordan 定理即是其中之一。本书由此处至下例前所說的即是該定理全部內容；但只是叙述，没有証明。此定理形式各种各样。为了便于了解本书这一段內容，給出初等因子定义以及其重要性质，欲知其証明必需参考矩陣論专书。

定义 1 設有其秩为 r，阶数为 n 的方陣 $A(\lambda) = (a_{ik}(\lambda))$，此处 $a_{ik}(\lambda)$ 为 λ 的多項式。$A(\lambda)$ 的所有 j 阶子行列式的最高公因式以 $d_j(\lambda)$ 表之。

$d_0(\lambda) = 1$, $d_1(\lambda)$, $\cdots$, $d_r(\lambda)$ 叫做 $A(\lambda)$ 的行列式因子，此处 $d_j(\lambda)$ 的最高次項系数为 1。

作 $e_j(\lambda) = d_j(\lambda)/d_{j-1}(\lambda)$，称 $e_j(\lambda)$ 为 $A(\lambda)$ 的初等因子，$1 \leqslant j \leqslant r$。

定义 2 特別当 $n = r$，称 $e_j(\lambda)$ 为 $|A(\lambda)|$ 的初等因子。

定理 1 $e_{j-1}(\lambda) | e_j(\lambda)$。

定理 2 $|\lambda E - A| = e_1(\lambda) \cdots e_n(\lambda)$，此处 $e_j(\lambda)$ 为 $\lambda E - A$ 的初等因子。——譯者注

$$B_{ik}=\begin{pmatrix}\lambda_k & 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0\\ 0 & \lambda_k & 1 & 0 & \cdots & 0 & 0\\ 0 & 0 & \lambda_k & 1 & \cdots & 0 & 0\\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots\\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & \lambda_k & 1\\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & \lambda_k\end{pmatrix}❶.$$

并且，詳細說來，設特征多項式$|\lambda E-A|$❷的初等因子为

$$e_1(\lambda),\ e_2(\lambda),\ \cdots,\ e_n(\lambda),$$

則

$$|\lambda E-A|=e_1(\lambda)e_2(\lambda)\cdots e_n(\lambda)❸.$$

一般設

$$e_i(\lambda)=(\lambda-\lambda_1)^{p_1}(\lambda-\lambda_2)^{p_2}\cdots(\lambda-\lambda_s)^{p_s},\quad \sum p_k=n_i,$$

上面的 B_{ik}(p_k 阶的)方陣就对应于 $(\lambda-\lambda_k)^{p_k}$: $B_{ik}=\lambda_k E_{p_k}+Z_{p_k}$ $(k=1,2,\cdots,s)$。E_{p_k} 是 p_k 阶的单位方陣，Z_{p_k} 是 p_k 阶的方陣，它同于在本节开始处用以表示(40.2)的 Z 的形式。

从而

$$|\lambda E_{p_k}-B_{ik}|=(\lambda-\lambda_k)^{p_k},\ B_i=\mathrm{diag}(B_{i1},\ B_{i2},\ \cdots,\ B_{is}),$$

$\lambda E_{n_i}-B_i$ 的初等因子是 $1,\ 1,\ \cdots,\ 1,\ e_i(\lambda)$❹。

例如 A 是一个三阶方陣，在

$$|\lambda E-A|=(\lambda-\lambda_1)(\lambda-\lambda_2)(\lambda-\lambda_3)$$

或

$$=(\lambda-\lambda_1)^2(\lambda-\lambda_3)\quad(\text{当 }\lambda_1=\lambda_2\text{ 时})$$

情况下，$\lambda E-A$ 的初等因子有下列各种可能情形：

---

❶ B_{ik} 或 $(B_{ik})^T$ 也即 $(B_{ik})'$ 叫做 Jordan 型矩陣。——譯者注

❷ 見第 137 頁注❶定义 2。——譯者注

❸ 見第 137 頁注❶定理 2。——譯者注

❹ 至此 Jordan 定理全部叙述完了。——譯者注

	$e_1(\lambda)$	$e_2(\lambda)$	$e_3(\lambda)$
(1)	1	1	$(\lambda-\lambda_1)(\lambda-\lambda_2)(\lambda-\lambda_3)$
(2)	1	$\lambda-\lambda_1$	$(\lambda-\lambda_1)(\lambda-\lambda_3)$ ❶
(3)	1	1	$(\lambda-\lambda_1)^2(\lambda-\lambda_3)$

对应于各个情况的 B_i 就是:

对应于(1)的是

$$B_3=\mathrm{diag}(\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3)\text{ ❷},$$

对应于(2)的是

$$B_2=(\lambda_1), \quad B_3=\mathrm{diag}(\lambda_1, \lambda_3),$$

对应于(3)的是

$$B_3=\mathrm{diag}(B_{31}, \lambda_3), \quad B_{31}=\begin{pmatrix}\lambda_1 & 1\\ 0 & \lambda_1\end{pmatrix}\text{ ❸}.$$

因而作为对应于(1), (2), (3)的 B 分别取以下形式:

$$B=\begin{pmatrix}\lambda_1 & 0 & 0\\ 0 & \lambda_2 & 0\\ 0 & 0 & \lambda_3\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}\lambda_1 & 0 & 0\\ 0 & \lambda_1 & 0\\ 0 & 0 & \lambda_3\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}\lambda_1 & 1 & 0\\ 0 & \lambda_1 & 0\\ 0 & 0 & \lambda_3\end{pmatrix}.$$

应用以上結果❹可得

---

❶ 設 $\lambda E-A$ 的初等因子为 e_1, e_2, e_3，于是依第 137 頁注❶中定理 2, $|\lambda E-A|=e_1e_2e_3$，再依該注定理 1 卽可得出。——譯者注

❷ 依上述 Jordan 定理可知 $B=\mathrm{diag}(B_1, B_2, B_3)$，而 $B_3=\mathrm{diag}(B_{31}, B_{32}, B_{33})$，又 $\lambda E-B_3$ 的初等因子为 $e_3(\lambda)$，此时 $e_3(\lambda)=(\lambda-\lambda_1)(\lambda-\lambda_2)(\lambda-\lambda_3)$，又应 $|\lambda E-B_{31}|=(\lambda-\lambda_1)$, $|\lambda E-B_{32}|=(\lambda-\lambda_2)$, $|\lambda E-B_{33}|=(\lambda-\lambda_3)$，所以 $B_{31}=(\lambda_1)$, $B_{32}=(\lambda_2)$, $B_{33}=(\lambda_3)$，从而 $B_3=\mathrm{diag}(\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3)$.

又因 $\lambda E-B_2$ 的初等因子为 $e_2(\lambda)=1$，仿上处理，可知 B_2 为零阶矩陣，B_1 也同。

——譯者注

❸ 此时 $\lambda E-B_3$ 的初等因子为 $e_3(\lambda)=(\lambda-\lambda_1)^2(\lambda-\lambda_3)$，又应 $|\lambda E-B_{31}|=(\lambda-\lambda_1)^2$, $|\lambda E-B_{33}|=(\lambda-\lambda_3)$，从而可知 $B_{31}=\begin{pmatrix}\lambda & 1\\ 0 & \lambda\end{pmatrix}$, $B_{33}=(\lambda_3)$，而 B_{32} 当为零阶。于是 $B_3=\mathrm{diag}(B_{31}, B_{33})$，此处 $B_{31}=\begin{pmatrix}\lambda & 1\\ 0 & \lambda\end{pmatrix}$, $B_{33}=(\lambda_3)$.——譯者注

❹ 卽上面的 Jordan 矩陣定理。——譯者注

$$\frac{dx}{dt}=Ax(x=Ky)\to\frac{dy}{dt}=By,$$

此处

$$B=K^{-1}AK\text{(Jordan 型矩陣)}❶,$$

而且

$$B=\text{diag}(B_1,\ B_2,\ \cdots,\ B_l)$$

之后，則解向量 y 是以

$$\frac{dz^i}{dt}=B_iz^i$$

的解向量的分量$(z_1^i,\ z_2^i,\ \cdots,\ z_{n_i}^i)$为分量的列向量(即纵向)，可写为

$$y=(z_1^1,\ z_2^1,\ \cdots,\ z_{n_1}^1,\ z_1^2,\ z_2^2,\ \cdots,\ z_{n_2}^2,\ \cdots,\ z_1^l,\ z_2^l,\ \cdots,\ z_{n_l}^l),$$

$$n_1+n_2+\cdots+n_l=n$$

(为了便于排版将这些向量横写出来，本可以写成 $n\times 1$ 矩陣)。写出上面的形式之后，$(z^i)'$就表示 y'. 而且 z^i 的分量就是由 s 組方程

$$\frac{d\xi^k}{dt}=B_{ik}\xi^k$$

的解向量 ξ^k 的分量:

$$\frac{d\xi_1}{dt}=\lambda_k\xi_1+\xi_2,$$

$$\frac{d\xi_2}{dt}=\lambda_k\xi_2+\xi_3,$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots,$$

$$\frac{d\xi_{p_k}}{dt}=\lambda_k\xi_{p_k}$$

所組成的

$$z^i=(\xi_1^1,\ \xi_2^1,\ \cdots,\ \xi_{p_1}^1,\ \xi_1^2,\ \xi_2^2,\ \cdots,\ \xi_{p_2}^2,\ \cdots,\ \xi_1^s,\ \xi_2^s,\ \cdots,\ \xi_{p_s}^s),$$

$$p_1+p_2+\cdots+p_s=n_i.$$

例如在 A 是三阶方陣而且特别是

$$|\lambda E-A|=(\lambda-\lambda_1)(\lambda-\lambda_2)(\lambda-\lambda_3)\text{或}(\lambda-\lambda_1)^2(\lambda-\lambda_3)$$

的情况下，原方程組可以取下列形式:

---

❶ 此为 A 的 Jordan 标准型。——譯者注

$$\begin{cases}\dfrac{dy_1}{dt}=\lambda_1 y_1,\\ \dfrac{dy_2}{dt}=\lambda_2 y_2,\\ \dfrac{dy_3}{dt}=\lambda_3 y_3,\end{cases}\text{或}\begin{cases}\dfrac{dy_1}{dt}=\lambda_1 y_1,\\ \dfrac{dy_2}{dt}=\lambda_1 y_2,\\ \dfrac{dy_3}{dt}=\lambda_3 y_3,\end{cases}\text{或}\begin{cases}\dfrac{dy_1}{dt}=\lambda_1 y_1+y_2,\\ \dfrac{dy_2}{dt}=\lambda_1 y_2,\\ \dfrac{dy_3}{dt}=\lambda_3 y_3\end{cases}$$

的某一个(这由 A 的元素 a_{ik} 而定)。第一种情况是 $(z_1^3, z_2^3, z_3^3)=(y_1, y_2, y_3)$,第二种情况是 $(z_1^2, z_1^1, z_2^3)=(y_1, y_2, y_3)$,第三种情况是 $(z_1^3, z_2^3, z_3^3)=(y_1, y_2, y_3)$. 例如,如将最后一种情况更詳尽地写出来就有

$z_1^3=\xi_1^3$, $z_2^3=\xi_2^3$, $z_3^3=\xi$ (因为缺欠和 λ_2 相对应的).

§ 41 特殊的情况——二維方程組

設作为考察对象的方程組是

$$\left.\begin{aligned}\frac{dx}{dt}&=\dot{x}=ax+by,\\ \frac{dy}{dt}&=\dot{y}=cx+dy,\end{aligned}\right\} ad-bc\neq 0. \tag{41.1}$$

对应于特征根的类别,由(41.1)导出以下各种情况:

1) 二根 λ_1, λ_2 是实数而且互异的情况 (41.1)經由綫性变换可化成

$$\dot{\xi}=\lambda_1\xi,\quad \dot{\eta}=\lambda_2\eta. \tag{41.2}$$

2) λ_1, λ_2 都是負数的情况

$$\xi=\xi_0 e^{-\mu_1 t},\ \eta=\eta_0 e^{-\mu_2 t}\quad (\lambda_i=-\mu_i,\ i=1,\ 2).$$

由于 $\left(\dfrac{\eta}{\eta_0}\right)^{\mu_1}=\left(\dfrac{\xi}{\xi_0}\right)^{\mu_2}$,积分曲綫就如图 41.1 所示。如果把(41.2)作为力学系来看,在位相平面上,不論以那一个点为出发点的軌道,也是随 $t\to+\infty$ 而趋向于平衡点 O. 这样的平衡点叫做稳定节点(stable node)。返回到原来的 x, y 就有

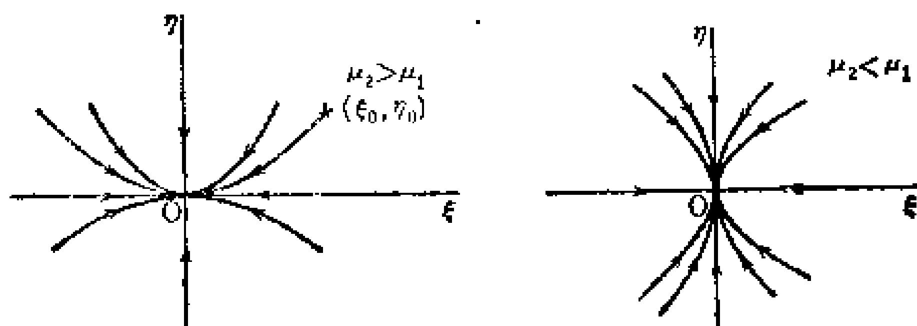


图　41.1

$$x=\alpha e^{-\mu_1 t}+\beta e^{-\mu_2 t}\sim\alpha e^{-\mu_1 t}\quad(\mu_2>\mu_1,\ t\to+\infty),$$
$$y=\gamma e^{-\mu_1 t}+\delta e^{-\mu_2 t}\sim\gamma e^{-\mu_1 t},$$
$$(a+\mu_1)\alpha+b\gamma=0,\qquad (a+\mu_2)\beta+b\delta=0❶.$$

在 x, y 平面上的軌道就是

---

❶ 令 $\xi=k_{11}x+k_{12}y$, $\eta=k_{21}x+k_{22}y$, 则

$$x=\frac{k_{22}}{\Delta}\xi_0 e^{-\mu_1 t}-\frac{k_{12}}{\Delta}\eta_0 e^{-\mu_2 t},\quad y=-\frac{k_{21}}{\Delta}\xi_0 e^{-\mu_1 t}+\frac{k_{11}}{\Delta}\eta_0 e^{-\mu_2 t},$$

此处
$$\Delta=\begin{vmatrix}k_{11} & k_{12}\\ k_{21} & k_{22}\end{vmatrix}.$$

令　$\alpha=\frac{k_{22}}{\Delta}\xi_0$,　$\beta=-\frac{k_{12}}{\Delta}\eta_0$,　$\gamma=-\frac{k_{21}}{\Delta}\xi_0$,　$\delta=\frac{k_{11}}{\Delta}\eta_0$. 依(40.8), $(a+\mu_2)k_{21}+ck_{22}=0$, 故得

$$\frac{k_{21}}{k_{22}}=-\frac{c}{a+\mu_2}.\tag{1}$$

又依 (40.9), $\mu_1+\mu_2=-(a+d)$ 以及 $(a+\mu_1)(d+\mu_1)-cb=0$; 于是有 $a+\mu_2=-(d+\mu_1)$, 继而有 $(a+\mu_1)(a+\mu_2)=-cb$, 即

$$\frac{a+\mu_1}{b}=-\frac{c}{a+\mu_2}.\tag{2}$$

合(1)与(2), 得

$$\frac{a+\mu_1}{b}=\frac{k_{21}}{k_{22}},$$

而依定义
$$-\frac{\gamma}{\alpha}=\frac{k_{21}}{k_{22}},$$

所以
$$\frac{a+\mu_1}{b}=-\frac{\gamma}{\alpha},$$

即
$$(a+\mu_1)\alpha+b\gamma=0.$$ ——譯者注

$$\frac{|(a+\mu_2)x+by|^{\mu_1}}{|(a+\mu_1)x+by|^{\mu_1}}=\frac{|\alpha(a+\mu_2)+\gamma b|^{\mu_1}}{|\beta(a+\mu_1)+\delta b|^{\mu_1}}\text{❶}.$$

現在作斜交軸变換

$$u=(a+\mu_1)x+by, \quad v=(a+\mu_2)x+by,$$

就得到

$$|v|^{\mu_2}=C|u|^{\mu_1}, \text{ 即 } |v|=D|u|^{\varepsilon}.$$

对应于 $\mu_1 \lesseqgtr \mu_2$ 就有 $\varepsilon \lesseqgtr 1$，因而軌道就如图 41.2 所示 ($\mu_1<\mu_2$ 的情况)。

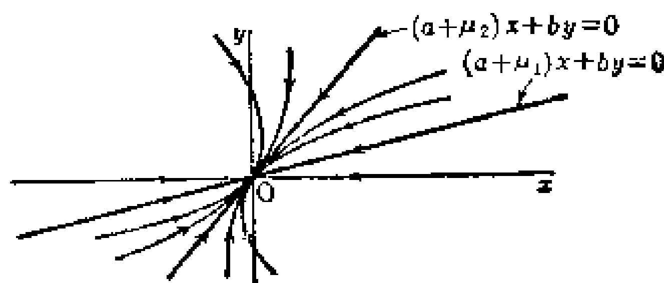


图 41.2 (0, 0)为稳定节点

3) λ_1, λ_2 都是正数的情况 在这一情况下，軌道与积分曲綫由于同形的緣故，当 $t\to-\infty$ 时，趋近于平衡点，从而节点叫不稳定的(unstable)。

4) λ_1, λ_2 有不同符号的情况 設 $\lambda_1=-\lambda(\lambda>0), \lambda_2=\mu(>0)$，由(41.2)可得

$$\xi=\xi_0 e^{-\lambda t}, \quad \eta=\eta_0 e^{\mu t}, \quad |\xi|^{\mu}|\eta|^{\lambda}=|\xi_0|^{\mu}|\eta_0|^{\lambda}.$$

把它画在 (ξ, η) 平面上而得到的图形就如图 41.3 所示的形状。

---

❶ 因 $(a+\mu_2)x+by=(a+\mu_2)(\alpha e^{-\mu_1 t}+\beta e^{-\mu_2 t})+b(\gamma e^{-\mu_1 t}+\delta e^{-\mu_2 t})$
$=e^{-\mu_1 t}(\alpha(a+\mu_2)+b\gamma)+e^{-\mu_2 t}((a+\mu_2)\beta+b\delta)=e^{-\mu_1 t}(\alpha(a+\mu_2)+b\gamma)$，故

$$\left|\frac{(a+\mu_2)x+by}{\alpha(a+\mu_2)+b\gamma}\right|^{\mu_2}=e^{-\mu_1\mu_2 t}. \tag{1}$$

同此 $$(a+\mu_1)x+by=e^{-\mu_2 t}(\beta(a+\mu_1)+b\delta),$$

故 $$\left|\frac{(a+\mu_1)x+by}{\beta(a+\mu_1)+b\delta}\right|^{\mu_1}=e^{-\mu_1\mu_2 t}. \tag{2}$$

(1)与(2)相除，即得。——譯者注

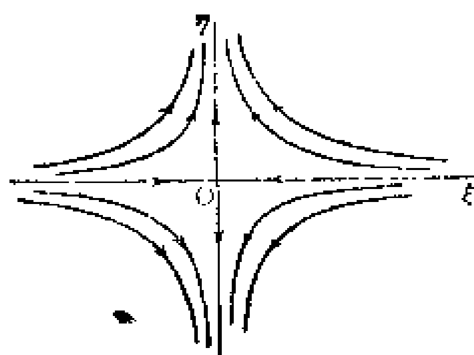


图 41.3　原点 O 特别叫做鞍点 (saddle point) 的平衡点

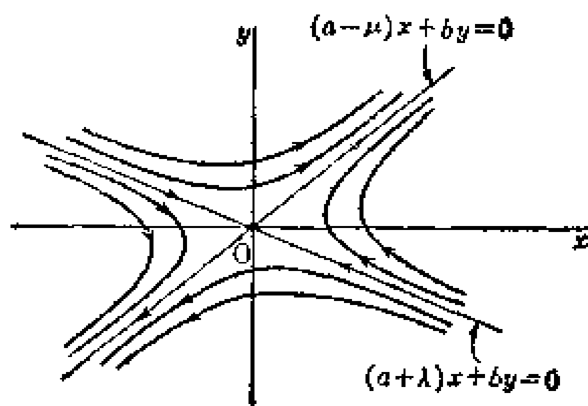


图 41.4　$(a+\lambda)x+by=0$, $(a-\mu)x+by=0$ 分别与 ξ 轴, η 轴相对应

如果返回到原来的位相平面 x, y, 就有

$$\left.\begin{aligned} x&=\alpha e^{-\lambda t}+\beta e^{\mu t},\\ y&=\gamma e^{-\lambda t}+\delta e^{\mu t}, \end{aligned}\right\}\text{此处}\ \begin{aligned} &(a+\lambda)\alpha+b\gamma=0\text{❶},\\ &(a-\mu)\beta+b\delta=0. \end{aligned}$$

由此消去 t 后, 积分曲綫就是

$$|(a+\lambda)x+by|^{\lambda}|(a-\mu)x+by|^{\mu}$$
$$=|(a+\lambda)\beta+b\delta|^{\lambda}|(a-\mu)\alpha+b\gamma|^{\mu}.$$

其图形如图 41.4 所示。

5) 复根的情况　$\lambda_1=-\mu+i\omega$, $\lambda_2=\bar{\lambda}_1$, $\mu>0$. (41.2) 就是

$$\frac{d\xi}{dt}=\lambda_1\xi,\quad \frac{d\bar{\xi}}{dt}=\bar{\lambda}_1\bar{\xi}.$$

首先設 $\xi=\xi_0e^{\lambda_1 t}=re^{i\theta}$, $(\xi_0=r_0e^{i\theta_0})$ 就有

$$r=r_0e^{-\mu t},\qquad \theta=\theta_0+\omega t.$$

因而在复平面 (ξ-平面) 上画出对数螺綫 (logarithmic spiral)。

返回到原来的 (x, y)-平面时, 就有

---

❶　細察第 142 頁注❶所得結果只与 "λ_1,λ_2 相异" 有关而与它們的正, 負号无关。于是此处 λ, μ 即是情况 2) 中 μ_1, $-\mu_2$, 从而由情况 2) 中已証得結果, 可推出此处的結果。——譯者注

$$x = r\rho_1 \cos(\theta + \delta_1), \quad y = r\rho_2 \sin(\theta + \delta_2)$$ ❶，

而且得到与图 41.5 同形的螺綫(spiral)。軌道随 $t \to \infty$ 而逐漸接近于平衡点 O。这种样式的平衡点叫做稳定的焦点(stable focus)。与此相反的即 $R\lambda_1 > 0$ 的情况，軌道的几何形状虽然与此相同，但当 $t \to -\infty$ 时軌道漸近于平衡点。从而在这个时候原点是不稳定的焦点。

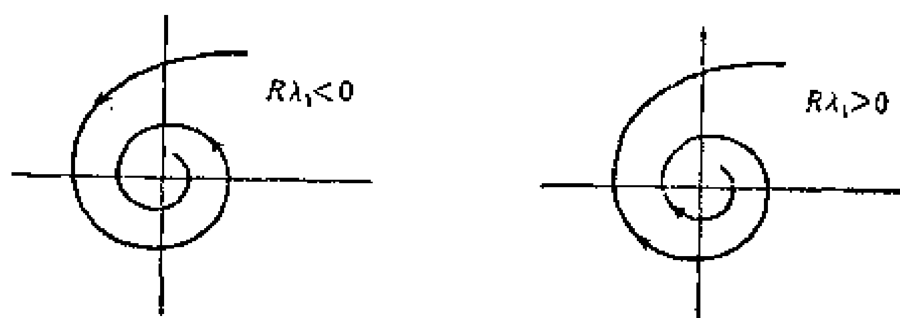


图 41.5

6) 純虛数根的情况 設 $\lambda_1 = i\omega$，就有

$$\xi = re^{i\theta}, \quad r = r_0, \quad \theta = \theta_0 + \omega t.$$

---

❶ 因 $x = \frac{k_{22}}{\Delta}\xi - \frac{k_{12}}{\Delta}\eta$——見第 142 頁注❶——，而

$$\xi = re^{i\theta}, \ \eta = \bar{\xi} = re^{-i\theta},$$

故 $$x = r\left(\frac{k_{22}}{\Delta}e^{i\theta} - \frac{k_{12}}{\Delta}e^{-i\theta}\right) = r\left\{\left(R\left(\frac{k_{22}}{\Delta}\right) + iJ\left(\frac{k_{22}}{\Delta}\right)\right)(\cos\theta + i\sin\theta)\right.$$
$$\left. - \left(R\left(\frac{k_{12}}{\Delta}\right) + iJ\left(\frac{k_{12}}{\Delta}\right)\right)(\cos\theta - i\sin\theta)\right\}.$$

由于 x 为实数，故

$$x = r\left\{\cos\theta\left(R\left(\frac{k_{22}}{\Delta}\right) - R\left(\frac{k_{12}}{\Delta}\right)\right) + \sin\theta\left(-J\left(\frac{k_{22}}{\Delta}\right) - J\left(\frac{k_{12}}{\Delta}\right)\right)\right\}$$
$$= r\cos\theta R\left(\frac{k_{22} - k_{12}}{\Delta}\right) - r\sin\theta J\left(\frac{k_{12} + k_{22}}{\Delta}\right).$$

令 $\alpha = R\left(\frac{k_{22} - k_{12}}{\Delta}\right)$，$\beta = J\left(\frac{k_{12} + k_{22}}{\Delta}\right)$，$\rho_1 = +\sqrt{\alpha^2 + \beta^2}$，則

$$x = r\rho_1\cos\theta\frac{\alpha}{\rho_1} - r\rho_1\sin\theta\frac{\beta}{\rho_1}.$$

再确定 δ_1 使得

$$\cos\delta_1 = \frac{\alpha}{\rho_1}, \quad \sin\delta_1 = \frac{\beta}{\rho_1},$$

于是 $x = r\rho_1(\cos\theta\cos\delta_1 - \sin\theta\sin\delta_1) = r\rho_1\cos(\theta + \delta_1)$.——譯者注

从而軌道描出以原点为中心的圓。映射到 (x, y)-平面上就成为

$$\frac{x^2}{r_0^2\rho_1^2}+\frac{y^2}{r_0^2\rho_2^2}=1$$

所表示的椭圆。

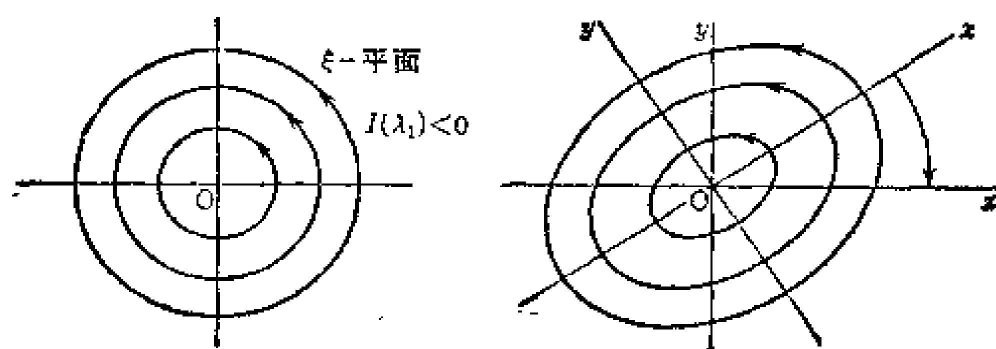


图 41.6

这样形式的平衡点(原点)叫做中心点 (centre)。值得注意的是依 $I(\lambda_1)$ 的正負不同,圍繞平衡点的旋轉方向也不同❶。

7) 等根的情况 設 $\lambda_1=\lambda_2=\lambda$. 此时經由綫性变换(41.1)就化成

$$\frac{d\xi}{dt}=\lambda\xi,\qquad \frac{d\eta}{dt}=\xi+\lambda\eta,$$

它的解取如下的形式:

$$\xi=\xi_0e^{\lambda t},\ \eta=(\xi_0t+\eta_0)e^{\lambda t}.$$

現在設 $\lambda=-\mu\ (\mu>0)$, 則隨着 $t\to+\infty$, $(\xi, \eta)\to 0$. 并且有

$$\frac{d\eta}{dt}=(\xi_0-\mu\eta_0-\mu\xi_0t)e^{-\mu t}.$$

从而当 $t=0$ 时, 由 (ξ_0, η_0) 出发的軌道, 在 $t=-\eta_0/\xi_0$ 时与 ξ-軸相交(走过初值点之后交截 ξ-軸); 并在交截直綫 $\eta=\frac{1}{\mu}\xi$ 时 $(t=(\xi_0-\mu\eta_0)/\mu\xi_0)$, 取极值; 在 $t\to+\infty$ 时將切 η-軸于平衡点。这就是說原点是稳定节点。在 $\lambda>0$ 时就是不稳定节点,軌道的形

❶ 图 41.6 的箭头方向与条件"$I(\lambda_1)<0$"不符。——譯者注

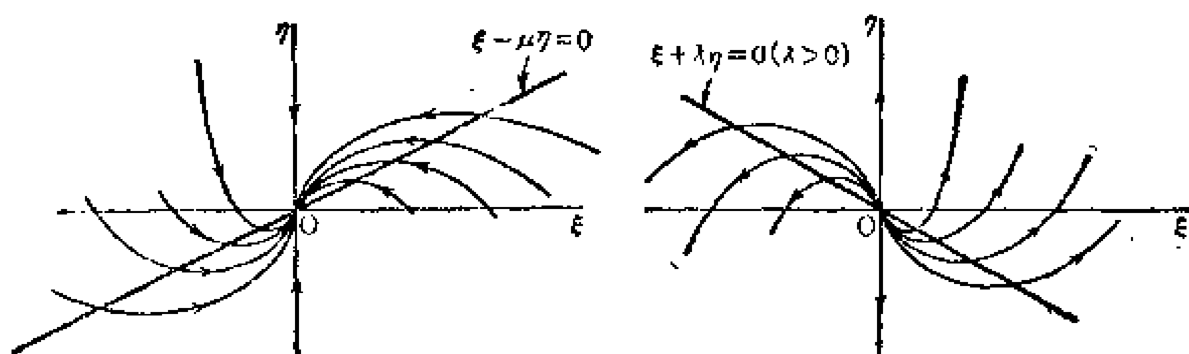


图 41.7

状如图 41.7 所示。

从 ξ-軸上的点出发，沿着軌道，到达极値直綫所需要的时間恒为一个定値 $-1/\lambda$❶。在原来 xy-平面上就是图 41.8 所示的軌道。

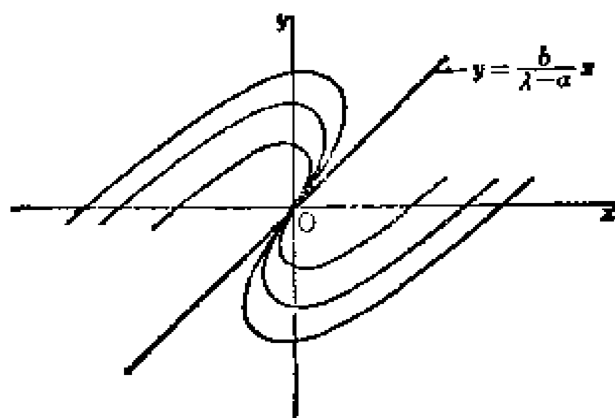


图 41.8

$$\left.\begin{aligned}x&=(x_0+\beta t)e^{\lambda t},\\ y&=(y_0+\delta t)e^{\lambda t},\end{aligned}\right\}\qquad \left.\begin{aligned}(a-\lambda)\beta+b\delta&=0,\\ (a-\lambda)x_0+by_0&=\beta.\end{aligned}\right\}$$

平衡点 O 或是不稳定节点，或是稳定节点，依 $\lambda>0$; $\lambda<0$ 而定

❶ 依上述，在 $t=-\frac{\eta_0}{\xi_0}$ 时，軌道交 ξ-軸，在 $t=\frac{\xi_0-\mu\eta_0}{\mu\xi_0}$ 时軌道交 $\eta=\frac{1}{\mu}\xi$ 而取极値，故沿軌道由 ξ-軸到达极値直綫所用的时間为

$$\frac{\xi_0-\mu\eta_0}{\mu\xi_0}-\left(-\frac{\eta_0}{\xi_0}\right)=\frac{\xi_0-\mu\eta_0+\mu\eta_0}{\mu\xi_0}=\frac{1}{\mu}=-\frac{1}{\lambda}.$$ ——譯者注

注意　在以上的討論里，对于特征根之一是 0 的情况，也就是当 $ad-bc=0$ 的情况，在一开始就摒弃未論。在这种情况下积分曲綫本身是很簡单的，然而作为力学系的軌道来看却是非常富于启发性的例子。

当 $ad-bc=0$ 时，(41.1) 为

$$\dot{x}=ax+by,\ \dot{y}=k(ax+by),$$

$$\frac{d}{dt}(ax+by)=(a+bk)(ax+by).$$

因而平衡点形成直綫 $ax+by=0$（称它为平衡直綫）。积分曲綫就是 $y-kx=c_0$（c_0 是任意常数）。这就是說积分曲綫是平衡直綫族。并且平衡直綫自身描出軌道。积分直綫与平衡直綫相交的时候，即当 $k\neq-a/b$ 时，全位相平面被平衡直綫 $ax+by=0$ 分为两个部分，都是稳定区域，或都是不稳定区域。例如在图 41.9 中若 $b>0$，

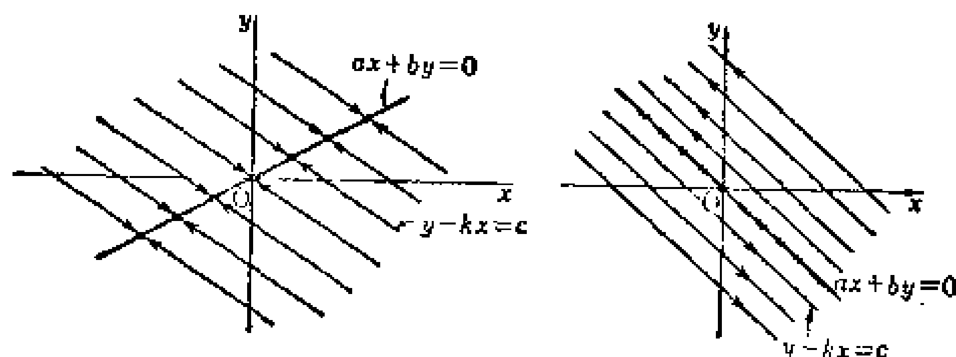


图　41.9

$k<-a/b$ 时就是稳定区域❶。还有在积分曲綫与平衡直綫相互平行的时候，即当 $k=-a/b$ 时，以平衡直綫为边界，位相平面被分成两部分，在其一方的区域内軌道的方向与在另一方的区域内的軌

❶　因 $\dot{x}=ax+by$，$y-kx=c_0$，故 $\dot{x}=x(a+bk)+bc_0$，因之，

$$x=\frac{bc_0}{-(a+bk)}+\varepsilon e^{(a+bk)t},$$

此处 ε 为积分常数，同此，

$$y=\frac{ac_0}{a+bk}+\varepsilon ke^{(a+bk)t}.$$

此时 $a+bk<0$，故当 $t\to\infty$ 时，x，y 向平衡直綫 $ax+by=0$ 趋近。——譯者注

道的方向正是相反的（图中 $b>0$ 的情况）❶。这种情况相应于特征根都是零的时候❷。

在一般非綫性問題中，这样的奇点集合——平衡点集合能够出現。例如，考虑形如

$$\dot{x}=\frac{(1+x)[\log(1+x)-y]}{1+\rho}, \qquad \dot{y}=\frac{y}{1+\rho}+\frac{\log(1+x)}{1+\rho},$$

此处

$$\rho=\sqrt{\log^2(1+x)+y^2}$$

的力学系时，在直綫 $x=-1$ 上就有 $\dot{x}=0$，$\dot{y}=-1$，因而这一直綫全体表示平衡点的集合。

---

❶ 沿用第 148 頁注❶方法，

$$\begin{cases} x-x_0=bc_0(t-t_0), \\ y-y_0=kbc_0(t-t_0). \end{cases}$$

現在 $k<0$，$b<0$，故当 $t\to\infty$，$x\to-\infty$，$y\to+\infty$ 或 $x\to+\infty$，$y\to-\infty$ 依 $c_0>0$ 或 <0 而定。請讀者注意：原书称图 41.9 右图是 $b>0$ 的情况不妥，而应是 $b<0$ 的情况。

——譯者注

❷ 因 $ad-bc=0$，故 $\frac{d}{b}=\frac{c}{a}=k$；从而

$$\begin{vmatrix} a-\lambda & b \\ c & d-\lambda \end{vmatrix}=\lambda^2-(a+d)\lambda.$$

随之可知 $\lambda_1=0$，$\lambda_2=a+d=a+bk=0$。——譯者注

第 6 章　周期系数的情况

§ 42　可簡化方程組

如果存在矩陣 $K(t)$，使下面的力学系經由变換 $X=KY$ 有

$$\frac{dX}{dt}=AX\to\frac{dY}{dt}=BY\ (B\text{ 是常数矩陣}),$$

而且在$(0,\infty)$內 $|K(t)|$, $|K^{-1}(t)|$ 都有界，則这一力学系叫做可簡化的(依 А. М. Ляпунов)。具有这样性質的 K 叫做 Ляпунов 矩陣。

考察(40.1)的力学系

$$\frac{dX}{dt}=AX.$$

我們来証下述定理[1]：

要使(40.1)是可簡化的，其充分而且必要的条件就是它的基础解系可写成

$$X=K(t)e^{Ct}$$

的形式。此处 $|K(t)|$, $|K^{-1}(t)|$ 都在 $t\geqslant t_0$ 处有界，并且矩陣 C 是 Jordan 型常数矩陣。

必要性的証明。

設
$$\frac{dX}{dt}=AX$$

是可簡化的。此时它經由 $X=KY$ 就化成

$$\frac{dY}{dt}=BY,$$

此处 B 是常数矩陣，$|K(t)|$, $|K^{-1}(t)|$ 都是有界的。然后再經由

[1] 这个結論是由 Н. П. Еругин 作出的。——校者注

变换 $Y=CU$ 就有

$$\frac{dY}{dt}=BY\to\frac{dU}{dt}=\bar{A}U,\quad \bar{A}=C^{-1}BC,\quad X=KCU.$$

如果选取适当的C，可使$\bar{A}$成为Jordan型，而且$|KC|=|K||C|$，$|(KC)^{-1}|=|C^{-1}||K^{-1}|$ 都有界。

以下証明充分性。

設微分方程組 (40.1)：$\frac{dX}{dt}=AX$ 具有形如 $\bar{X}=K(t)e^{Ct}$ 的解，此处設 K,C 满足定理的条件。現在置换 $X=KY,K=\bar{X}e^{-Ct}$ 就得到

$$\frac{dX}{dt}=\frac{d\bar{X}}{dt}e^{-Ct}Y+\bar{X}(-C)e^{-Ct}Y+\bar{X}e^{-Ct}\frac{dY}{dt}=A\bar{X}e^{-Ct}Y.$$

但因 $\frac{d\bar{X}}{dt}=A\bar{X}$，所以

$$\bar{X}e^{-Ct}\frac{dY}{dt}=\bar{X}e^{-Ct}CY\text{[1]}.$$

又因为 e^{-Ct}，$\bar{X}$，C 的任何一个都是非奇异矩陣，所以

$$\frac{dY}{dt}=CY.$$

証毕

現在将可簡化的充分条件中最具有特性的叙述如下：

如果方程組 (40.1)：$\frac{dX}{dt}=AX$ 的解都是有界的，而且对于所有 t

$$\int_0^t \operatorname{tr} A\,dt>d\ (>-\infty),$$

---

[1] $\frac{d}{dt}e^{At}=Ae^{At}=e^{At}A$，此处 A 为常数矩陣。

[証] 依定义，$e^{At}=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{n!}A^nt^n$，于是

$$\frac{de^{At}}{dt}=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(n-1)!}A^nt^{n-1}=A\sum_{n=1}^{\infty}\frac{A^{n-1}t^{n-1}}{(n-1)!}$$
$$=\left(\sum_{n=1}^{\infty}\frac{A^{n-1}t^{n-1}}{(n-1)!}\right)A.\text{——譯者注}$$

则(40.1)可簡化为 $\frac{dY}{dt}=0$.

今設所給方程組的解的基本矩陣为 X_0，由于假定它是有界的❶，它的逆矩陣 X_0^{-1} 的第 (i, k) 元素取 $|X_{ki}|/|X_0|$ 之形式。$|X_{ki}|$ 是矩陣 X_0 的第 (i, k) 元素所对应的余因子。然而依(36.2)

$$|X_0(t)|=e^{\int_0^t \operatorname{tr} A\,dt}>e^d \text{❷}.$$

$|X_0^{-1}|$ 是有界的，从而 X_0 是 Ляпунов 矩陣。

再置換 $X=X_0Y$，就有

$$\frac{dX}{dt}=\frac{dX_0}{dt}Y+X_0\frac{dY}{dt}=AX_0Y\rightarrow X_0\frac{dY}{dt}=0.$$

因为 X_0 是非异的，所以

$$\frac{dY}{dt}=0.$$

証毕

再依(34.5)的基本不等式，则当

$$\int_0^\infty M_A(t)dt<\infty$$

时，(40.1)的解都是有界的❸，所以代替上一定理我們有：

为了使得 $\frac{dX}{dt}=AX$ 可簡化为 $\frac{dY}{dt}=0$，只要

$$\int_0^\infty M_A(t)dt<\infty \text{❹}$$

---

❶　令 $X_0=(x_{ik}(t))$ $(i, k=1, 2, \cdots, n)$，今依假設对于每个 k 解 $x^k=(x_{ik})$ $(i=1, 2, \cdots, n)$ 有界，故依定义 $x_{ik}(t)$ 有界，再由行列式値之定义可知 $|X_0|$ 有界。——譯者注

❷　此处解矩陣 X_0 应是标准組；不然应当是

$$|X_0(t)|=|X_0(0)|e^{\int_0^t \operatorname{tr} A\,dt}>|X_0(0)|e^d,$$

但由于 $|X_0(0)|\neq 0$，也可証得 $|X_0^{-1}|$ 的有界性。——譯者注

❸　参考§39注意(1)及注。——譯者注

❹　“对于 t 的每个值，$\int_0^t \operatorname{tr} A\,dt>d(>-\infty)$”这个假設条件可以推証出来。因

$$\left|\int_0^t \operatorname{tr} A\,dt\right|\leqslant\int_0^\infty(|a_{11}|+\cdots+|a_{nn}|)dt\leqslant n\int_0^\infty \max_k\sum_{i=1}^n|a_{ik}|dt=n\int_0^\infty H(t)dt$$

$$=n\int_0^\infty M_A(t)dt<\infty.$$——譯者注

成立就够了。

注意 作为 $M_A(t)$，也可以取所謂矩陣 $A(t)$ 的范：

$$\|A(t)\|=\sum_{i,k}|a_{ik}(t)|\text{❶},$$

虽然通常把 $\sqrt{\sum_{i,k}|a_{ik}(t)|^2}$ 定义为 $\|A(t)\|$。

§43 周期系数組

在本节中主要討論把 Ляпунов 矩陣应用到周期系数的方程組上的問題。

考察方程組

$$\frac{dX}{dt}=A(t)X. \tag{43.1}$$

設 $A(t)$ 在 $-\infty<t<\infty$ 連續，而且是具有以 ω 为周期的周期函数：$A(t+\omega)=A(t)$。

現在假定 $X(t)$ 是基本解矩陣的一个($|X(t)|\neq 0$)，于是有

$$\frac{dX(t+\omega)}{d(t+\omega)}=\frac{dX(t+\omega)}{dt}=A(t+\omega)X(t+\omega)$$
$$=A(t)X(t+\omega),$$

即 $X(t+\omega)$ 也是解，而且是基本解矩陣，因 $|X(t+\omega)|\neq 0$。因而

$$X(t+\omega)=X(t)C\quad(|C|\neq 0)\text{❷},$$

并且

$$|C|=e^{\int_0^\omega \operatorname{tr}A\,dt}.$$

这是因为由(36.2)可以得到

$$|X(t)|=|X(t_0)|e^{\int_{t_0}^t \operatorname{tr}A\,dt},$$

---

❶ 此处注意并非説 $M_A(t)=\|A(t)\|$，而是説上述

$$\int_0^\infty M_A(t)dt<\infty$$ 中 $M_A(t)$ 可以 $\|A(t)\|$ 代替。——譯者注

❷ 参看§36文中注意以前的一段，可知

$$X(t+\omega)=YC_1,\quad X(t)=YC_2,$$

此处 Y 为解之标准組，C_1, C_2 为常数矩陣，且 $|C_1|\neq 0$，$|C_2|\neq 0$；于是 $X(t+\omega)=X(t)C_2^{-1}C_1$，令 $C=C_2^{-1}C_1$ 即可。——譯者注

从而就有

$$|X(t+\omega)|=|X(t_0)|e^{\int_{t_0}^{t+\omega}\mathrm{tr}\,A\,dt},$$

$$|X(t_0+\omega)|=|X(t_0)|e^{\int_{t_0}^{\omega}\mathrm{tr}\,A\,dt}=|X(t_0)|\cdot|C|$$

的緣故。

今設 P 为 $|P|\neq 0$ 的任意常数矩陣，如果变换 $\bar{X}=XP$，就有

$$P^{-1}CP=P^{-1}X^{-1}(t)X(t+\omega)P=(X(t)P)^{-1}X(t+\omega)P$$
$$=\bar{X}^{-1}(t)\bar{X}(t+\omega)\sim C\text{❶}.$$

因而若选得适当非异矩陣 P，可以使 $P^{-1}CP$ 为 Jordan 形式。因而从一开始作基本解矩陣 X 时，就选取对应矩陣 C 为 Jordan 矩陣好了。因而一般情况下

$$C=\mathrm{diag}\,(C_1,\ C_2,\ \cdots,\ C_r).$$

特别地，当 $|\lambda E-C|=0$ 的根不相等时，

$$C=\mathrm{diag}\,(\lambda_1,\ \lambda_2,\ \cdots,\ \lambda_n).$$

因为 $|C|\neq 0$，所以

$$|C_i|\neq 0\quad (i=1,\ 2,\ \cdots,\ r)\text{❷},$$

因而可以看出存在有满足

$$C_i=e^{\omega B_i},\quad |B_i|\neq 0$$

的矩陣 B❸。若設

$$B=\mathrm{diag}\,(B_1,\ B_2,\ \cdots,\ B_r)$$

就有

$$C=e^{\omega B}.$$

在此处作矩陣 $P(t)=e^{Bt}X^{-1}$，可知 P 是周期函数矩陣，因为

---

❶ 此处 $P^{-1}CP$ 与 C 是所謂“相似”关系，而以～表之——这是定义与规定。——譯者注

❷ 利用行列式論中定理“$C=\mathrm{diag}\,(C_1,\cdots,C_r)\to|C|=\prod_{i=1}^{r}|C_i|$”；或者利用 $|C|=0$ 之充要条件也可。——譯者注

❸ 对于矩陣 X，在 $|X|\neq 0$ 成立的条件下，常有 Y 存在，它满足 $e^Y=X$。一般說 Y 不唯一，而在保持唯一性条件下来定义 $\log X$。——原书注

$$P(t+\omega)=e^{B(t+\omega)}X^{-1}(t+\omega)=e^{B(t+\omega)}[X(t)C]^{-1}$$
$$=e^{Bt}\cdot e^{B\omega}C^{-1}X^{-1}(t)=e^{Bt}X^{-1}(t)=P(t).$$

既然 $P(t)$ 确乎是周期函数,它就不能不是有界的。另一方面

$$|P(t)|=|e^{Bt}|\cdot|X^{-1}(t)|\neq 0.$$

再設

$$Y=PX(=e^{Bt}),$$

就有

$$\frac{dY}{dt}=BY\text{❶}.\quad 此处\ B=\frac{1}{\omega}\log C.$$

在特别的情况下,对于 $C=\text{diag}(\lambda_1, \lambda_2, \cdots, \lambda_n)$ (并不限定各个 λ_i 必須是互异的),$B=\text{diag}(\mu_1, \mu_2, \cdots, \mu_n)$,$\mu_i=\dfrac{1}{\omega}\log\lambda_i$.

綜合以上所述可以得到如下的結論:

周期系数的方程組,可以經由周期函数矩陣化为可簡化的❷。

特征方程 $|E\mu-B|=0$ 的根的实部称为方程組 $\dfrac{dX}{dt}=AX$ 的特征指数(Characteristic exponent)。对于所給的方程組,特征指数是不是唯一决定的?答复是肯定的。那末能不能給出特征指数的最精确的定义来呢?关于这样的事情却是一件繁杂的解析問

---

❶ 因 $\dfrac{d}{dt}e^{Bt}=Be^{Bt}$.

由于 $P(t)$ 为周期函数,又 $P(t)P^{-1}(t)=E$,所以 $P(t+w)P^{-1}(t+w)=P(t)P^{-1}(t)$,因此 $P^{-1}(t+w)=P^{-1}(t)$,即 $P^{-1}(t)$ 也是周期函数,从而 $P^{-1}(t)$ 有界。——譯者注

❷ 这个周期系数方程組的定理的叙述是:

假設(43.1)中 $A(t)$ 連續于 $-\infty<t<\infty$,且 $A(t+\omega)=A(\omega)$,则(43.1)可简化,即 $\exists K=P^{-1}$ 使 (1) $|K|$,$|K^{-1}|$ 于$(0,\infty)$有界。(2) $\dfrac{dY}{dt}=BY$,此处 B 为常数矩陣。

从以上論証,也得出以下結論:

对于(43.1)的每个基本解矩陣 $X(t)$,$X(t+\omega)$也是(43.1)的基本解矩陣;对于每个这样 $X(t)$,存在一个周期为 ω 的非奇异矩陣 P^{-1} 使 $X=P^{-1}e^{Bt}$,此处 B 为常数矩陣。

本定理对于 (43.1) 所起之作用和 $X=e^{(t-t_0)A}X_0$ 对于常系数方程組的作用相类似。——譯者注

题，这一点可从下面的說明中看出来。

例如矩陣 C 与原方程組关系較矩陣 B 更为直接。从而特征指数的定义由 C 給出較由 B 給出更好。現在考察 B, C 的特征方程：

$$|\lambda E-B|=0, \quad |\lambda E-C|=0.$$

如果矩陣 B 的特征数是 λ，而且这一矩陣 B 的初等因子是单純的，則 $e^{\omega B}$ 的特征数是 $e^{\omega\lambda}$，并且矩陣 $e^{\omega B}$ 的初等因子也还是单純的❶。于是設

$|\lambda E-C|=0$ 的特征根为 $s_1, s_2, \cdots, s_n$；

$|\lambda E-B|=0$ 的特征根的实部为 $r_1, r_2, \cdots, r_n$，

就有

$$r_i=\frac{1}{\omega}\operatorname{Re}(\log s_i) \quad (i=1, 2, \cdots, n).$$

如果矩陣 C 的初等因子不是单純的，則 s_i 与 r_i 的关系就变得复杂了。

注意 如果用标量把本节內容概略地說明的話，則可叙述为：命 $Y=(y_{ik})$，就有

$$\frac{dY}{dt}=BY\rightarrow y_{ik}=\sum\varphi_{ik}(t)e^{\mu_j t},$$

当 B 的特征根 μ_j 彼此互异时，$\varphi_{ik}(t)$ 就是常数系数，但是在一般情况下它是 t 的多项式(参看(40.3))。原来的解：$X=(x_{ik})$ 取如下的形式：

$$X=P^{-1}Y\rightarrow x_{ik}=\sum\bar{p}_{is}y_{sk}=\sum_j\psi_{ik}(t)e^{\lambda_j t}.$$

显然当 λ_j 都是彼此互异时 μ_j 也是彼此互异的，因而这时系数函数 $\psi_{ik}(t)$ 是周期 ω 的周期函数。反之，在一般情况下 $\psi_{ik}(t)$ 可以被整理为具有系数为周期 ω 的周期函数的 t 的多项式。

在下一节里，将以特殊的两个方程的方程組为对象来复习本节所討論的內容。

---

❶ $B=\operatorname{diag}(B_1, B_2, \cdots, B_r)\rightarrow e^{tB}=\operatorname{diag}(e^{tB_1}, \cdots, e^{tB_r})$（見 §40）。

——譯者注

§ 44 具有周期系数的二阶方程

設方程

$$\ddot{x}(t)+p(t)\dot{x}(t)+q(t)x(t)=0, \tag{44.1}$$

此处 $p(t+\omega)=p(t)$，$q(t+\omega)=q(t)$。命 $x=x_1$，$\dot{x}=x_2$，(44.1)就与

$$\begin{pmatrix}\dot{x}_1\\ \dot{x}_2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0 & 1\\ -q(t) & -p(t)\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x_1\\ x_2\end{pmatrix} \tag{44.2}$$

等价。設基本解矩陣为

$$X=\begin{pmatrix}x_{11} & x_{12}\\ x_{21} & x_{22}\end{pmatrix}\quad (|X|\neq 0),$$

則

$$X_1=\begin{pmatrix}x_{11}\\ x_{21}\end{pmatrix},\quad X_2=\begin{pmatrix}x_{12}\\ x_{22}\end{pmatrix}$$

就是解向量基本組。今設 $y_1=x_{11}$，$y_2=x_{12}$，則 y_1，y_2 就是(44.1)的解的基本組之一❶。因为 $X(t+\omega)=X(t)C$，所以

$$\left.\begin{aligned}y_1(t+\omega)=c_{11}y_1(t)+c_{21}y_2(t),\\ y_2(t+\omega)=c_{12}y_1(t)+c_{22}y_2(t).\end{aligned}\right\} \tag{44.3}$$

此处系数与选取基本組的方法有关系，可是二次方程

$$\begin{vmatrix}c_{11}-\rho & c_{21}\\ c_{12} & c_{22}-\rho\end{vmatrix}=0,\quad \begin{vmatrix}c_{11} & c_{21}\\ c_{12} & c_{22}\end{vmatrix}=e^{-\int_0^\omega p(t)\,dt} \tag{44.4}$$

---

❶ 因 $\begin{pmatrix}\dot{x}_{11} & \dot{x}_{12}\\ \dot{x}_{21} & \dot{x}_{22}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0 & 1\\ -q & -p\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x_{11} & x_{12}\\ x_{21} & x_{22}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}x_{21} & x_{22}\\ -qx_{11}-px_{21} & -qx_{12}-px_{22}\end{pmatrix}$，故

$$\dot{x}_{21}=-qx_{11}-px_{21},\quad \dot{x}_{22}=-qx_{12}-px_{22},$$
$$\dot{x}_{11}=x_{21},\qquad \dot{x}_{12}=x_{22},$$

从而得出 $\ddot{x}_{11}+p\dot{x}_{11}+qx_{11}=0$，$\ddot{x}_{12}+p\dot{x}_{12}+qx_{12}=0$，

令 $y_1=x_{11}$，$y_2=x_{12}$，則由此可知 y_1，y_2 为(44.1)的解的基本組，且

$x_{21}=\dot{y}_1$，$x_{22}=\dot{y}_2$。——譯者注

的根与解的选取法无关❶。

现在設 C 的特征方程 (44.4) 具有两个相异的根 ρ_1, ρ_2, 則 (44.3)經由綫性变换就化为 Jordan 形式:

$$\eta_1(t+\omega)=\rho_1\eta_1(t),\quad \eta_2(t+\omega)=\rho_2\eta_2(t). \qquad (44.5)$$

当(44.4)具有等根 $\rho_1=\rho_2$ 时,一般說就有

$$\eta_1(t+\omega)=\rho_1\eta_1(t),\quad \eta_2(t+\omega)=c_{12}\eta_1(t)+\rho_1\eta_2(t). \quad (44.6)$$

于此应注意的是因为 $|C|\neq 0$, 所以(44.4)决沒有等于零的根。

首先討論(44.5)的情况。对于 $\log\rho_1$, $\log\rho_2$ 限于一定值❷而考察如下的函数

$$\rho_1^{t/\omega}=e^{t\log\rho_1/\omega},\quad \rho_2^{t/\omega}=e^{t\log\rho_2/\omega}$$

时,在以 $t+\omega$ 代 t 后,能使得 ρ_1, ρ_2 作为因子而出现。因而

$$\eta_1(t)\rho_1^{-t/\omega},\quad \eta_2(t)\rho_2^{-t/\omega}$$

是周期 ω 的周期函数。于是命

$$\eta_1(t)=\rho_1^{t/\omega}\varphi_1(t),\quad \eta_2(t)=\rho_2^{t/\omega}\varphi_2(t), \qquad (44.7)$$

φ_1, φ_2 都成为周期 ω 的周期函数。

其次,在(44.6)的情况下, η_1 与(44.7)有相同的表現形式,而对于 η_2 作如下的处理。由(44.6)

$$\frac{\eta_2(t+\omega)}{\eta_1(t+\omega)}=\frac{\eta_2(t)}{\eta_1(t)}+c,\quad c=\frac{c_{12}}{\rho_1},$$

这就是說 $\dfrac{\eta_2(t)}{\eta_1(t)}$ 在以 $t+\omega$ 代 t 后增加了 c。于是考虑

---

❶ 另設 $\overline{X}$ 为(44.2)的基本解矩陣,則 $\overline{X}(t+\omega)=\overline{X}(t)P^{-1}CP$, 此处 P 为常数矩陣,且 $|P|\neq 0$ (参考 § 43)。

令 $C_1=P^{-1}CP$, 則 $C_1-\rho E=P^{-1}CP-\rho E=P^{-1}(C-\rho E)P$, 从而 $|C_1-\rho E|=|P^{-1}||C-\rho E||P|=|C-\rho E|$ (因 $|P^{-1}||P|=1$)。此即

$$\begin{vmatrix} c_{11}-\rho & c_{21} \\ c_{12} & c_{22}-\rho \end{vmatrix}=|C-\rho E|=0$$

的根与基本組 X 的选取无关之意。——譯者注

❷ 此处"限于一定値"意即"取其单値"。——譯者注

$$\frac{\eta_2(t)}{\eta_1(t)}-\frac{c}{\omega}t=\psi_1(t)$$

的函数时，它就是周期 ω 的周期函数了。

因之在(44.6)的情况下，η_1, η_2 取如下的形式

$$\eta_1(t)=\rho_1^{t/\omega}\varphi_1(t), \qquad \eta_2(t)=\frac{c}{\omega}t\eta_1(t)+\psi_1(t)\eta_1(t),$$

或

$$\eta_1(t)=\rho_1^{t/\omega}\varphi_1(t), \qquad \eta_2(t)=\rho_1^{t/\omega}[\varphi_2(t)+t\varphi_3(t)], \qquad (44.8)$$

此处 $\varphi_1,\varphi_2,\varphi_3$ 的任何一个都是周期 ω 的周期函数。如果观察 φ_3 的結构，特別在 $c=0$ 时，(44.8)就同于(44.7)的形式。

以下对于特征方程(44.4)及其特征根再稍加研究。(44.3)的系数矩陣 C 依存于解的基本組的选法，現取出满足如下的初始条件的标准組而加以考察：

$$\begin{pmatrix} x_{11}(0) & x_{12}(0) \\ x_{21}(0) & x_{22}(0) \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} y_1(0) & y_2(0) \\ y_1'(0) & y_2'(0) \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}=E ❶.$$

由于这些初始条件是实数，而且(44.1)或(44.2)的系数函数是实数这一事实，所求解的标准組就是实数函数。

再由 $X(\omega)=X(0)C=EC=C$，就有

$$c_{11}=x_{11}(\omega)=y_1(\omega), \quad c_{21}=x_{21}(\omega)=y_1'(\omega);$$

$$c_{12}=x_{12}(\omega)=y_2(\omega), \quad c_{22}=x_{22}(\omega)=y_2'(\omega).$$

因而特征方程(44.4)就是

$$\begin{vmatrix} y_1(\omega)-\rho & y_1'(\omega) \\ y_2(\omega) & y_2'(\omega)-\rho \end{vmatrix}=0, \qquad (44.9)$$

这个二次方程的系数是实数。

考虑在(44.1)内，特别是 $\dot{x}$ 的系数 $p(t)$ 不出現的情况。这就是所謂 Mathieu 型方程

---

❶ 参照第157頁注❶。——譯者注

$$\ddot{x}(t)+q(t)x(t)=0,\qquad q(t+\omega)=q(t).$$

此时 $|C|=1$，从而(44.9)就是

$$\rho^2-2\gamma\rho+1=0,\qquad 2\gamma=y_1(\omega)+y_2'(\omega).\qquad(44.10)$$

(44.10)的根的判别式是 γ^2-1，当 $|\gamma|>1$ 时存在有两个乘积为1的相异实根。其中一个根其絕对值比1大，另一个比1小。当 $|\gamma|<1$ 时，存在有共轭复数根，它們的絕对值等于1. 最后，当 $\gamma=\pm1$ 时，存在有等根，它們的值是 ±1. 由以上可以推测到当 $t\to\infty$ 时，方程的解受 γ 的值所支配。以下詳細研究这一事实。

(44.7)式的因子 $\varphi_1(t)$，$\varphi_2(t)$ 既是周期函数，故当 $t\to+\infty$ 时有界，从而 $t\to+\infty$ 时解的行为本质上受第一因子

$$\rho_1^{t/\omega}=\exp\left(\frac{t}{\omega}\log\rho_1\right),\qquad \rho_2^{t/\omega}=\exp\left(\frac{t}{\omega}\log\rho_2\right)$$

所支配。此处 $\mathrm{Re}\log\rho=\log|\rho|$.

設 $|\gamma|>1$　为了方便設 $|\rho_1|>|\rho_2|$，因为 $|\rho_1|>1>|\rho_2|$，所以 $\log|\rho_1|>0>\log|\rho_2|$；从而在此情况下，(44.7)的第一个的解当 $t\to\infty$ 时不是有界的❶，第二个的解确实是收斂于0. 因而通解 $C_1\eta_1(t)+C_2\eta_2(t)$ 在一般情况 $(C_1\neq0)$ 下，不是有界的；作为力学系来看是不稳定的。

設 $|\gamma|<1$　在这一情况下 $\mathrm{Re}\log\rho_1=\mathrm{Re}\log\rho_2=0$，从而

$$|\rho_1^{t/\omega}|=|\rho_2^{t/\omega}|=1❷.$$

❶ 因 $\eta_1(t)=\rho_1^{t/\omega}\varphi_1(t)$，而 $\rho_1^{t/\omega}=\exp\left(\frac{t}{\omega}\log\rho_1\right)$，但 $\log\rho_1=\log|\rho_1|+i\theta$，此处 $\theta=\arg\rho_1$，故

$$\rho_1^{t/\omega}=\exp\left(\frac{t}{\omega}\log|\rho_1|+i\frac{t}{\omega}\theta\right)=e^{\frac{t}{\omega}\log|\rho_1|}\cdot e^{i\frac{t}{\omega}\theta}.$$

于是 $\eta_1(t)=e^{\frac{t}{\omega}\log|\rho_1|}\cdot e^{i\frac{t}{\omega}\theta}\cdot\varphi_1(t)$，从而 $|\eta_1(t)|=e^{\frac{t}{\omega}\log|\rho_1|}\cdot|\varphi_1(t)|$. 由于 $\log|\rho_1|>0$，$\omega>0$，以及 $|\varphi_1|$ 为周期函数，可知当 $t\to\infty$，$\eta_1(t)$ 无界。

同样，$|\eta_2(t)|=e^{\frac{t}{\omega}\log|\rho_2|}|\varphi_2(t)|$，由于 $\log|\rho_2|<0$，$\omega>0$，以及 $|\varphi_2|$ 有界，可知当 $t\to\infty$，$\eta_2(t)\to0$. ——譯者注

❷ 因 $\log\rho_1=\log|\rho_1|+i\theta$，故 $\mathrm{Re}\log\rho_1=\log|\rho_1|$，而今 $|\rho_1|=1$，故 $\mathrm{Re}\log\rho_1=0$. 又 $\rho_1^{t/\omega}=e^{\frac{t}{\omega}\log|\rho_1|}\cdot e^{i\frac{t}{\omega}\theta}=1\cdot e^{i\frac{t}{\omega}\theta}$，从而 $|\rho_1^{t/\omega}|=1$. ——譯者注

因而(44.7)的两个解当 $t\to+\infty$ 时都是有界的，从而通解也就是恒有界的了。

現在如果求初始条件为

$$y(0)=a,\quad \dot{y}(0)=b$$

的解，就有

$$y(t)=ay_1(t)+by_2(t)=C_1\eta_1(t)+C_2\eta_2(t)\text{[1]}.$$

C_1, C_2 是关于 a, b 的一次齐次式，如果 a, b 充分小，这一解对于所有 $t>0$，就絕对值說，是尽可能小的。换言之，就是稳定的。

設 $\gamma=\pm1$ 現在考虑 $\gamma=1$ 卽 $\rho_1=\rho_2=1$ 的情况。在这一情况下，有

$$\eta_1(t)=\varphi_1(t),\quad \eta_2(t)=\varphi_2(t)+t\varphi_3(t),$$

而且 φ_1, φ_2, φ_3 的任何一个都是以 ω 为周期的周期函数。第一个解是单純的周期函数(周期 ω 的)，可是第二个解，因为 t 的存在，一般說不是有界的。只有在函数 $\varphi_3(t)$ 恒等于 0 的情况下 ($y_2(\omega)=0$ 时——$y_2(t)$ 是周期函数)[2]，第二个解还是单純的周期函数(周期 ω 的)。

其次，考虑当 $\gamma=-1$ 卽 $\rho_1=\rho_2=-1$，从而 $\log\rho_1=\log\rho_2=\pi i$ 的情况。此时有

$$\eta_1(t)=e^{i\pi t/\omega}\varphi_1(t),\quad \eta_2(t)=e^{i\pi t/\omega}[\varphi_2(t)+t\varphi_3(t)].$$

显然第一个解是周期 2ω 的单純的周期函数，可是第二个解，与上述情况相同，一般說不是有界的。

把以上所討論的与极特殊的 q 为常数的情况：

---

[1] 令 $y(t)=ay_1(t)+by_2(t)$，但 y_1, y_2 为(44.1)的解的标准組，卽

$$\begin{pmatrix} y_1(0) & y_2(0) \\ y_1'(0) & y_2'(0) \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix},$$

故 $y(0)=a\cdot1+b\cdot0=a$, $\dot{y}(0)=a\dot{y}_1(0)+b\dot{y}_2(0)=b$.——譯者注

[2] 因 $\varphi_3=\frac{c}{\omega}\varphi_1$，而 $c=\frac{c_{12}}{\rho_1}$，又 $c_{12}=y_2(\omega)$，故 $\varphi_3=\frac{y_2(\omega)}{\omega}\varphi_1$，因此，

$$y_2(\omega)=0\to\varphi_3\equiv0.$$——譯者注

$$\ddot{x}+qx=0$$

来作一个对照。在此可以把 q 看作任意周期 ω 的周期函数，当 $q>0$ 而設 $q=k^2$ 时，則事实上方程有形如

$$\eta_1(t)=e^{ikt},\ \ \eta_2(t)=e^{-ikt}\ (\varphi_1=\varphi_2=1)$$ ❶

的解。如果以 $t+\omega$ 代 t，就有

$$\eta_1(t+\omega)=e^{ik\omega}\eta_1(t),\ \ \eta_2(t+\omega)=e^{-ik\omega}\eta_2(t),$$

从而

$$\rho_1=e^{ik\omega},\ \ \rho_2=e^{-ik\omega};\ \ |\rho_1|=|\rho_2|=1.$$

因而这里所討論的正是对应于 $|\gamma|<1$ 的一种情况。实际上滿足初始条件：

$$\begin{pmatrix} y_1(0) & y_2(0) \\ y_1'(0) & y_2'(0) \end{pmatrix}=E$$

的就是

$$\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} \cos kt \\ \dfrac{\sin kt}{k} \end{pmatrix}\to 2\gamma=y_1(\omega)+y_2'(\omega)=2\cos k\omega\,(=\rho_1+\rho_2).$$

在 $k\omega=2\pi$ 的情况下，有 $y_2(\omega)=\dfrac{1}{k}\sin k\omega=0$，只在这情况下，所討論的是对应于 $\gamma=1$ 的情况 $(\varphi_3\equiv0)$。

当 $q<0$ 而設 $q=-k^2$ 时，方程就有形如

$$\eta_1(t)=e^{kt},\ \ \eta_2(t)=e^{-kt}$$ ❷

的解。此时有

---

❶ 当(44.1)特殊地成为 $\ddot{x}+qx=0$，相应地(44.2)成为

$$\begin{pmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -q & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix},$$

但此时 $q=k^2$ 为常数(假設)，因之，得依 §41 理論，由于其特征方程

$$\begin{vmatrix} 0-\lambda & 1 \\ -q & 0-\lambda \end{vmatrix}=0,$$

即 $\lambda^2+q=0$，故依該节 5) 可知 $\eta_1(t)=e^{ikt}$，$\eta_2(t)=e^{-ikt}$。——譯者注

❷ 依 §41，4)。——譯者注

$$\rho_1 = e^{k\omega}, \quad \rho_2 = e^{-k\omega}; \quad 2\gamma = 2\cosh k\omega,$$

因而所討論的是对应于 $\gamma > 1$ 的情况。

最后，虽說是特别情况，但是它在应用上很重要，为此要用一定篇幅来叙述。假定方程

$$\ddot{x}(t) + q(t)x(t) = 0, \quad q(t+\omega) = q(t)$$

中 $q(t)$ 不发生符号上的变化。一般在应用上 Mathieu 方程以形式

$$m\ddot{x} + (k + \Delta k \sin \omega t)x = 0$$

出现的情况是很多的。方程中 m 表示质量，k，Δk 表示弹簧系数(spring constant)，变动于 $k-\Delta k$ 与 $k+\Delta k$ 之間。其中 $k>0$，$\frac{\Delta k}{k} \ll 1$ (例如 10%) 的情况出現于軸、绳索、机車等运轉問題中。而在一端固定的摆之类的情况中是 $k<0$ 的。

将上一方程改写为与它等价的 (44.2) 的形式:

$$\dot{x}_1 = x_2, \quad \dot{x}_2 = -q(t)x_1. \quad (44.11)$$

此处假定 $q(t) \leqslant 0$，$t \geqslant 0$. 如果 $q(t_0) = 0$，則在 $t_0 + n\omega$ 时，$q=0$. 从(44.11)得来的向量 (x_1, x_2) 的分量的方向取图示箭头所指方向。令 $x_1^2 + x_2^2 = r^2$，則

$$\frac{dr^2}{dt} = 2[1 - q(t)]x_1x_2.$$

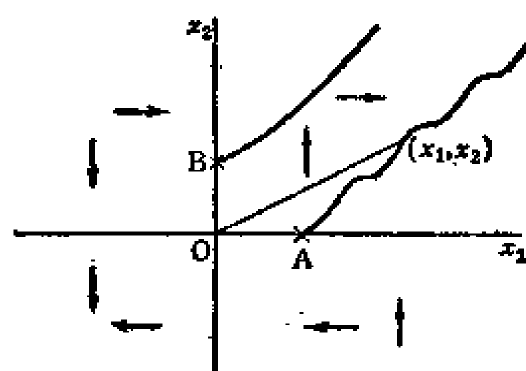


图 44.1

因而在 $x_1x_2 > 0$ 的区域(第一，第三象限)中軌道随时間的进行而离开原点，从 x_1-軸上的 A 以及从 x_2-軸上的 B 出发的軌道就是如图所示那样离开原点的。因而如果取 $A(1, 0)$，$B(0, 1)$ 就得到以下事实：满足初始条件

$$\begin{pmatrix} y_1(0) & y_2(0) \\ y_1'(0) & y_2'(0) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

的基本組 $y_1(t)$，$y_2(t)$ 对于所有 $t>0$ 有

$$y_1(t)>1, \qquad y_1'(t)>0;$$
$$y_2(t)>0, \qquad y_2'(t)>1.$$

所以

$$2\gamma=y_1(\omega)+y_2'(\omega)>2, \quad \gamma>1.$$

因而当 $q(t)\leqslant 0\ (t>0)$ 时，就有 $\gamma>1$，从而 ρ_1，ρ_2 就是两互异的正数，因此运动是不稳定的。

其次，假定 $q(t)\geqslant 0(t\geqslant 0)$．此时問題就稍微复杂了，如果先談出結果的話就是：如果 $q(t)$ 满足条件

$$\omega\int_0^\omega q(t)\,dt\leqslant 4\text{❶},$$

就有 $|\gamma|<1$，ρ_1，ρ_2 是共軛的复数，而且 $|\rho_1|=|\rho_2|=1$，解是有界的，从而运动就是稳定的。以下依 Ляпунов 的方法，对这一事实进行証明。

設 ε 为参变数，用方程

$$\frac{d^2x}{dt^2}+\varepsilon q(t)x(t)=0, \qquad q(t+\omega)=q(t)$$

代替原方程而进行研究，满足初始条件

$$\begin{pmatrix} y_1(0) & y_2(0) \\ y_1'(0) & y_2'(0) \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

的解向量 $y=(y_1, y_2)$ 就是 Volterra 型积分方程

$$y(t)=f(t)-\varepsilon\int_0^t (t-\tau)q(\tau)y(\tau)\,d\tau,$$

式中

$$\begin{cases} f(t)=(1,\ t), \\ y(0)=(1,\ 0), \quad y'(0)=(0,\ 1) \end{cases}$$

---

❶ 这个結果是屬于 A. M. Ляпунов 的。見 A. M. Ляпунов:“运动稳定性若干問題”。——校者注

的解❶。如将对应于核 $K(t, \tau)=(t-\tau)q(\tau)$ 的解核（相反核）写为 $\Gamma(t, \tau; \lambda)$，就有

$$y(t)=f(t)+\varepsilon\int_0^t \Gamma(t, \tau; -\varepsilon)f(\tau)d\tau \text{❷},$$

再将它分解为分量

$$\begin{cases} y_1(t)=1+\varepsilon\int_0^t \Gamma(t, \tau; -\varepsilon)d\tau, \\ y_2(t)=t+\varepsilon\int_0^t \Gamma(t, \tau; -\varepsilon)\tau d\tau. \end{cases}$$

从而运动的判定条件就写成

$$2\gamma=y_1(\omega)+y_2'(\omega)=2+\varepsilon\Gamma(\omega, \omega; -\varepsilon)\omega + \varepsilon\int_0^\omega\left[\Gamma(\omega,\tau; -\varepsilon)+\frac{\partial\Gamma(\omega, \tau; -\varepsilon)}{\partial\omega}\tau\right]d\tau \text{❸}.$$

---

❶ 設 y_1 为其解，則 $\frac{d^2y_1}{dt^2}=-\varepsilon q y_1$，故 $\frac{dy_1}{dt}=-\varepsilon\int_0^t q(t)y_1(t)dt+c_1$，由于初始条件 $y_1'(0)=0$，应当 $c_1=0$，是以 $\frac{dy_1}{dt}=-\varepsilon\int_0^t q(t)y_1(t)dt$，从而

$$y_1=-\varepsilon\int_0^t\int_0^t q(t)y_1(t)dt\,dt+c_2=-\varepsilon\int_0^t(t-\tau)q(\tau)y_1(\tau)d\tau+c_2$$

(Cauchy 公式)，再依初始条件 $y_1(0)=1$，故 $c_2=1$，于是

$$y_1=-\varepsilon\int_0^t(t-\tau)q(\tau)y_1(\tau)d\tau+1=1-\varepsilon\int_0^t(t-\tau)q(\tau)y_1(\tau)d\tau.$$

同理可得
$$y_2=t-\varepsilon\int_0^t(t-\tau)q(\tau)y_2(\tau)d\tau.$$

故在設 $f(t)=(1, t)$，$y(0)=(1, 0)$，$y'(0)=(0, 1)$ 之后，則有

$$y(t)=f(t)-\varepsilon\int_0^t(t-\tau)q(\tau)y(\tau)d\tau.$$——譯者注

❷ 这是根据綫性积分方程中关于 Volterra 型积分方程的三种傳統解法之一，所謂迭代法也即迭次核法定理：

$$y(t)=f(t)-\varepsilon\int_a^t K(t, \tau)y(\tau)d\tau,$$

此处 $K(t, \tau)$ 連續于 $a\leqslant t, \tau\leqslant b$，$f(t)$ 于 $[a, b]$ 連續 $\longrightarrow$ ∃唯一解

$$y(t)=f(t)+\varepsilon\int_a^t \Gamma(t, \tau; -\varepsilon)f(\tau)d\tau.$$——譯者注

❸ 因 $y_2(t)=t+\varepsilon\int_0^t \Gamma(t,\tau; -\varepsilon)\tau d\tau$，故

$$\frac{d}{dt}y_2(t)=1+\varepsilon\frac{d}{dt}\int_0^t \Gamma(t, \tau; -\varepsilon)\tau d\tau=1+\varepsilon\left\{\int_0^t\frac{\partial\Gamma(t, \tau; -\varepsilon)}{\partial t}\tau d\tau+\Gamma(t, t; -\varepsilon)t\right\},$$

从而
$$y_2'(\omega)=1+\varepsilon\left\{\int_0^\omega\frac{\partial\Gamma(\omega, \tau; -\varepsilon)}{\partial\omega}\tau d\tau+\Gamma(\omega, \omega; -\varepsilon)\omega\right\}.$$

此处等式右端第二項是 $\varepsilon\Gamma(\omega, \omega; -\varepsilon)\omega$，原书漏掉因子 ω。——譯者注

然而第n迭次核可写成

$$K_n(t, \tau)=(t-\tau)^{2n-1}q(\tau)k_n(t, \tau),$$

此处

$$\begin{cases} k_n(t, \tau)=\int_0^1 q[\tau+(t-\tau)\theta]k_{n-1}[t, \tau+(t-\tau)\theta](1-\theta)^{2n-3}\theta\, d\theta \\ k_2(t, \tau)=\int_0^1 q[\tau+(t-\tau)\theta](1-\theta)\theta\, d\theta, \quad k_1(t, \tau)=1❶, \end{cases}$$

所以 $\Gamma(\omega, \omega; -\varepsilon)\equiv 0$❷。

因而

$$2\gamma=2+\varepsilon\int_0^{\omega}\left[\Gamma(\omega, \tau; -\varepsilon)+\frac{\partial\Gamma(\omega, \tau; -\varepsilon)}{\partial\omega}\tau\right]d\tau$$

$$=2+\sum_{n=1}^{\infty}(-\varepsilon)^n\int_0^{\omega}\left[K_n(\omega, \tau)+\frac{\partial}{\partial\omega}K_n(\omega, \tau)\cdot\tau\right]d\tau.$$

---

❶ 因

$$K_2(t, \tau)=\int_{\tau}^{t}K(t, \tau')K(\tau', \tau)d\tau'=\int_{\tau}^{t}(t-\tau')q(\tau')(\tau'-\tau)q(\tau)\, d\tau'$$

$$=q(\tau)\int_{\tau}^{t}(t-\tau')q(\tau')(\tau'-\tau)d\tau'=q(\tau)\int_0^1(t-\tau)^3(1-\theta)\theta q(\tau+(t-\tau)\theta)d\theta$$

$$=q(\tau)\ (t-\tau)^3\int_0^1(1-\theta)\theta q(\tau+(t-\tau)\theta)\, d\theta,$$

令 $k_2(t, \tau)=\int_0^1(1-\theta)\theta q(\tau+(t-\tau)\theta)\, d\theta$，故

$$K_2(t, \tau)=q(\tau)(t-\tau)^3 k_2(t, \tau).$$

一般令 $k_n(t, \tau)=\int_0^1 q(\tau+(t-\tau)\theta)(1-\theta)^{2n-3}\theta k_{n-1}(t, \tau+(t-\tau)\theta)\, d\theta$ 及 $K_n(t, \tau)=(t-\tau)^{2n-1}q(\tau)k_n(t, \tau)$，则

$$K_{n+1}(t, \tau)=\int_{\tau}^{t}K_n(t, \tau')K(\tau', \tau)d\tau'=\int_{\tau}^{t}(t-\tau')^{2n-1}q(\tau')k_n(t, \tau')(\tau'-\tau)q(\tau)d\tau'$$

$$=q(\tau)\int_0^1(t-\tau)^{2n-1}(1-\theta)^{2n-1}q(\tau')k_n(t, \tau+(t-\tau)\theta)(t-\tau)^2\theta\, d\theta$$

$$=q(\tau)(t-\tau)^{2n+1}\int_0^1 q(\tau+(t-\tau)\theta)(1-\theta)^{2n-1}\theta k_n(t, \tau+(t-\tau)\theta)d\theta$$

$$=(t-\tau)^{2n+1}q(\tau)k_{n+1}(t, \tau),$$

此处 $k_{n+1}(t, \tau)=\int_0^1 q(\tau+(t-\tau)\theta)(1-\theta)^{2(n+1)-3}\theta k_n(t, \tau+(t-\tau)\theta)\, d\theta.$

原书上一式中漏掉因子 $(1-\theta)^{2n-3}\theta$，下一式中漏掉因子$(1-\theta)\theta$。——譯者注

❷ 参照§35，Neumann 級数。——譯者注

今取 $\varepsilon=1$，于是可将 γ 写为

$$\gamma=1-\frac{1}{2}\gamma_1+\frac{1}{2}\gamma_2-\frac{1}{2}\gamma_3+\frac{1}{2}\gamma_4-\cdots,$$

此处 $\gamma_n=\int_0^\omega\left[K_n(\omega,\tau)+\frac{\partial K_n(\omega,\tau)}{\partial\omega}\tau\right]d\tau$。然而一方面

$$K_n(\omega,\tau)-K_{n+1}(\omega,\tau)=\int_\tau^\omega[K_{n-1}(\omega,t)-K_n(\omega,t)]K(t,\tau)dt,$$

$$K_1(\omega,\tau)-K_2(\omega,\tau)=q(\tau)\left[\omega-\tau-\int_\tau^\omega(\omega-t)(t-\tau)q(t)\,dt\right]$$

$$\geqslant q(\tau)\left[\omega-\tau-\frac{(\omega-\tau)^2}{4}\int_\tau^\omega q(t)\,dt\right]$$

$$>❶\, q(\tau)(\omega-\tau)\left[1-\frac{\omega}{4}\int_0^\omega q(t)\,dt\right].$$

因而如果

$$\omega\int_0^\omega q(t)dt\leqslant 4,$$

由数学归纳法，对于所有 n，

$$K_n(\omega,\tau)-K_{n+1}(\omega,\tau)>0❷。$$

但是另一方面，如果注意到 $K_n(\omega,\omega)=0$ ($n=1,2,3,\cdots$)，这一事实，还有

$$\frac{\partial}{\partial\omega}[K_n(\omega,\tau)-K_{n+1}(\omega,\tau)]$$

$$=\frac{\partial}{\partial\omega}\int_\tau^\omega K(\omega,t)[K_{n-1}(t,\tau)-K_n(t,\tau)]\,dt❸$$

$$=\int_\tau^\omega q(t)[K_{n-1}(t,\tau)-K_n(t,\tau)]\,dt,$$

---

❶ 此处原书误为“$\geqslant$”。——譯者注

❷ 只将上述 $K_1(\omega,\tau)-K_2(\omega,\tau)>0$ 的証明中更改字母，就可証得

$$K_1(\omega,t)-K_2(\omega,t)>0\quad(\tau\leqslant t<\omega).$$

归納地假設 $K_{n-1}(\omega,t)-K_n(\omega,t)>0$ $(\tau\leqslant t<\omega)$，則

$$K_n(\omega,t)-K_{n+1}(\omega,t)=\int_t^\omega(K_{n-1}(\omega,t')-K_n(\omega,t'))K(t',t)dt'>0\quad(\tau\leqslant t<\omega).$$

于是特别地 $K_n(\omega,\tau)-K_{n+1}(\omega,\tau)>0$。——譯者注

❸ 参照 § 35。——譯者注

以及从

$$K_1(t, \tau)-K_2(t, \tau)\geqslant q(\tau)\left[t-\tau-\frac{(t-\tau)^2}{4}\int_\tau^t q(t')\,dt'\right]$$

$$>❶\, q(\tau)(t-\tau)\left[1-\frac{\omega}{4}\int_0^\omega q(t)\,dt\right],$$

同于上述情况对于任意号数 n

$$K_n(t, \tau)-K_{n-1}(t, \tau)>0,$$

则 $\gamma_1>\gamma_2>\gamma_3>\cdots\geqslant 0$, 所以

$$1-\frac{1}{2}\gamma_1<\gamma<1.$$

然而

$$\gamma_1=\int_0^\omega\left[K(\omega, \tau)+\frac{\partial K(\omega, \tau)}{\partial\omega}\cdot\tau\right]d\tau$$

$$=\int_0^\omega[(\omega-\tau)q(\tau)+q(\tau)\tau]\,d\tau$$

$$=\int_0^\omega \omega q(\tau)\,d\tau,$$

故由上結果得出

$$-1<1-\frac{\omega}{2}❷\int_0^\omega q(t)\,dt<\gamma<1.$$

---

❶ 此处原书誤为"$\geqslant$"。——譯者注

❷ 因 $\omega\int_0^\omega q(t)\,dt\leqslant 4$, 又

$$r_1=\int_0^\omega \omega q(\tau)\,d\tau,$$

故
$$r_1=\omega\int_0^\omega q(t)\,dt\leqslant 4,$$

从而
$$\frac{r_1}{2}=\frac{\omega}{2}\int_0^\omega q(t)\,dt\leqslant 2,\quad -\frac{r_1}{2}=-\frac{\omega}{2}\int_0^\omega q(t)\,dt\geqslant -2,$$

所以 $1-\frac{1}{2}r_1=1-\frac{\omega}{2}\int_0^\omega q(t)\,dt\geqslant 1-2=-1$, 再結合 $1-\frac{1}{2}r_1<r<1$, 得到此处不等式。

原书此式右端誤为 $1-\frac{1}{2\omega}\int_0^\omega q(t)\,dt$。——譯者注

注意 这一証明与 Ляпунов 的証法是完全不同的，并且或許不劣于它。在 Ляпунов 的証明中引用了一个极为技巧性的不等式作为預备定理[1] (Liapounoff (Ляпунов), Problème Général de la Stabilité du Mouvement, Princeton Univ. Press (1949), p. 402～407)[2]。

---

[1] 此不等式为

$$(f_{n-1}+\varphi'_{n-1})t\int_0^t q\,dt-2n(f_n+\varphi'_n)>0,$$

此处 $n>1$, $f_0(t)=1$, $\varphi_0(t)=t$, $f_n(t)=\int_0^t dt\int_0^t q\,f_{n-1}(t)\,dt$, $\varphi_n(t)=\int_0^t dt\int_0^t q\,\varphi_{n-1}(t)\,dt$ ——見該文献 404 頁。——譯者注

[2] 关于二阶周期系数微分方程解的穩定性問題，Goran Borg, А. В. Юровский 和 В. И. Старжинский 等人均有新的工作。讀者可參看張学銘等：微分方程穩定性理論讲义，第八章。——校者注

第7章 Ляпунов 特征数理論

§45 Ляпунов 的特征数理論

把所給方程組用矩陣形式写为

$$\frac{dY}{dt}=P(t)Y,\ P=(p_{ik}),\ Y=(y_{ik})\quad (i,\ k=1,\ 2,\cdots,\ n). \tag{45.1}$$

$P(t)$ 是定义于 $0\leqslant t<\infty$ 的連續函数。

在本节中主要研究当 $t\to\infty$ 时 $Y(t)$ 的漸近性质。首先，設 $Y=Y(t,\ t_0)$ 是滿足在 $t=t_0$ 时初始条件：$Y(t_0,\ t_0)=E$(单位矩陣)的解的基本矩陣。如 §36 所述，以 YC ($C=(c_{ik})$ 是常数矩陣)表示(45.1)的任意的解矩陣❶。

当 $t\to+\infty$ 时，$Y(t)$ 取一定的极限值：

$$\lim_{t\to\infty}Y(t)=B,$$

則叫这一解矩陣"在 $t\to\infty$ 时处于正态分布"。

首先以下事实成立："若 $\int_0^\infty\|P(t)\|dt<\infty$，則 $Y(t,\ t_0)$ 在 $t\to\infty$ 时处于正态分布。" 此处 $\|P\|$ 是(見 §42 末尾注意)表 P 的范为 $\sum_{i,k}|p_{ik}|$。因为 (45.1) 的解的基本矩陣就是下列积分方程的解：

$$Y(t)=E+\int_{t_0}^{t}P(\tau)Y(\tau)d\tau. \tag{45.2}$$

关于为我們所定义的矩陣的范，有

$$\|A+B\|\leqslant\|A\|+\|B\|,\ \|AB\|\leqslant\|A\|\cdot\|B\|,\ \|\lambda A\|=|\lambda|\cdot\|A\|$$

(λ 为标量)等关系。它們直接由范的定义即可得出。如果利用这些关系，由(45.2)就得到

$$\|Y(t)\|\leqslant\|E\|+\int_{t_0}^{t}\|P(\tau)\|\|Y(\tau)\|d\tau,\quad \|E\|=n.$$

❶ 參照第 122 頁注❶。——譯者注

如果应用 § 34 的基本不等式(34.1)就得到

$$\|Y(t)\| \leqslant n[1+(e^{M(t)}-1)] = ne^{M(t)}, \quad M(t)=\int_{t_0}^{t}\|P(\tau)\|d\tau,$$

或
$$\|Y(t)\| \leqslant n\exp\left(\int_{t_0}^{\infty}\|P(\tau)\|d\tau\right).$$

因而解矩陣是恒有界的。再由(45.2)得到

$$Y(t)-Y(t')=\int_{t'}^{t}P(\tau)Y(\tau)d\tau.$$

所以有

$$\|Y(t)-Y(t')\| \leqslant n\exp\left(\int_{t_0}^{\infty}\|P(\tau)\|d\tau\right)\int_{t'}^{t}\|P(\tau)\|d\tau\, e^{\int_{t'}^{t}\|P(\tau)\|d\tau} \to 0$$

$$(t',\ t\to\infty)\text{ ❶},$$

---

❶ 因 $Y(t)-Y(t')=\int_{t'}^{t}P(\tau)Y(\tau)d\tau=\int_{t'}^{t}P(\tau)(Y(\tau)-Y(t'))d\tau+\int_{t'}^{t}P(\tau)Y(t')d\tau$

故
$$\|Y(t)-Y(t')\| \leqslant \int_{t'}^{t}\|P(\tau)\|\|Y(t')\|d\tau+\int_{t'}^{t}\|P(\tau)\|\|Y(\tau)-Y(t')\|d\tau$$
$$\leqslant n\exp\left(\int_{t_0}^{\infty}\|P(\tau)\|d\tau\right)\int_{t'}^{t}\|P(\tau)\|d\tau+\int_{t'}^{t}\|P(\tau)\|\|Y(\tau)-Y(t')\|d\tau.$$

应用 § 34 基本不等式,

$$\|Y(t)-Y(t')\| \leqslant n\exp\left(\int_{t_0}^{\infty}\|P(\tau)\|d\tau\right)M(t)$$
$$+e^{M(t)}\int_{t'}^{t}e^{-M(\tau)}\|P(\tau)\|n\exp\left(\int_{t_0}^{\infty}\|P(\tau)\|d\tau\right)M(\tau)d\tau,$$

此处 $M(t)=\int_{t'}^{t}\|P(\tau)\|d\tau$, $M(t')=0$, 而

$$\int_{t'}^{t}e^{-M(\tau)}\|P(\tau)\|M(\tau)d\tau=\left[\int e^{-M(\tau)}M(\tau)dM(\tau)\right]_{t'}^{t}$$
$$=\left[-M(\tau)e^{-M(\tau)}-e^{-M(\tau)}\right]_{t'}^{t}=-M(t)e^{-M(t)}-e^{-M(t)}+1,$$

所以
$$\|Y(t)-Y(t')\| \leqslant n\exp\left(\int_{t_0}^{\infty}\|P(\tau)\|d\tau\right)M(t)+e^{M(t)}n\exp\left(\int_{t_0}^{\infty}\|P(\tau)\|d\tau\right)$$
$$(-M(t)e^{-M(t)}-e^{-M(t)}+1)=n\exp\left(\int_{t_0}^{\infty}\|P(\tau)\|d\tau\right)(M(t)-M(t)-1+e^{M(t)})$$
$$=n\exp\left(\int_{t_0}^{\infty}\|P(\tau)\|d\tau\right)(e^{M(t)}-1).$$

但
$$e^{M(t)}-1=e^{M(t)}-e^{M(t')}=(M(t)-M(t'))e^{M(\zeta)},$$

此处 $t'\leqslant\zeta\leqslant t$, 而 $M(t')=0$, $M(\zeta)\leqslant M(t)$, 故

$$\|Y(t)-Y(t')\| \leqslant n\exp\left(\int_{t_0}^{\infty}\|P(\tau)\|d\tau\right)M(t)\cdot e^{M(t)},$$

即
$$\|Y(t)-Y(t')\| \leqslant n\exp\left(\int_{t_0}^{\infty}\|P(\tau)\|d\tau\right)\cdot\int_{t'}^{t}\|P(\tau)\|d\tau\cdot e^{\int_{t'}^{t}\|P(\tau)\|d\tau}.$$

原书此式右端脱落因子 $e^{\int_{t'}^{t}\|P(\tau)\|d\tau}$.——譯者注

这就是說 $\lim\limits_{t\to\infty} Y(t)$ 是存在的❶。因而 $Y(t, t_0)$ 在 $t\to\infty$ 时处于正态分布。

由于(45.1)的任意的解

$$Z(t, t_0)=Y(t)Z(t_0, t_0),$$

所以它是有界的，而且

$$\lim_{t\to\infty} Z=BZ_0, \quad B=\lim_{t\to\infty} Y(t), \quad Z_0=Z(t_0, t_0).$$

显然处于正态分布的解都是有界的❷。

注意　研究解的有界性的判别条件，是很困难的一个問題，对二阶方程这个問題还未彻底解决。Ляпунов 根据他为了研究解的漸近状态而定义的特征数(characteristic number)开拓了独自的領域。这里所謂特征数就是用这样的数給予解以特性的意思。以下会观察到涉及若干关于这一概念之处含于 Perron 所定义的概念中。但是要注意 Perron 称之为特征指数(characteristic exponent)。如果讀者熟习复变函数論的整函数論中整函数的位数❸这一概念，则可以体会到这一思想与前述概念非常类似。本节內容主要参考下列論文写出来的：S. P. Diliberto: On Systems of Ordinary Differential Equations (S. Lefschetz 編, Contributions to the Theory of Nonlinear Oscillations (1950), p. 1～38)。

假設所考察的函数都是定义于 $t_0\leqslant t<\infty$ 內的。今設 $\psi(t)$ 是正单調增加函数，且 $\psi(t)\to\infty(t\to\infty)$，即 $\psi(t)\uparrow+\infty$，又設 $f(t)$ 为某一个連續函数。如果数 λ 使得

(a)　$\overline{\lim\limits_{t\to\infty}}\{|f(t)|\psi(t)^{\lambda+\varepsilon}\}=\infty,$

---

❶ 这个結果是属于 N. Wintner 的，其簡浩証明見張学銘等：微分方程穩定性理論讲义，第二章。——校者注

❷ 由正态分布定义以及 $P(t)$ 連續的这个假設，即可得知。——譯者注

❸ 整函数 $f(z)$ 具有位数 ρ，如果

$$\overline{\lim_{r\to\infty}}\frac{\log\log M(r)}{\log r}=\rho,$$

此处 $M(r)$ 为 $f(z)$ 的最大模。——譯者注

(b) $\lim\limits_{t\to\infty}\{|f(t)|\psi(t)^{\lambda-\varepsilon}\}=0,$

此处 $\varepsilon>0$ 是每个的，则定义 λ 为"关于 $\psi(t)$ 的，$f(t)$ 的特征数"❶。

Perron 以 $-\lambda$ 代替下式中的 λ 而定义特征数

$$\lambda=+\overline{\lim_{t\to\infty}}\frac{\log|f(t)|}{t}. \tag{45.3}$$

显然此 λ 可自 Ляпунов 的定义导出。理由如下：設 λ 是依 Ляпунов 定义的 $f(t)$ 的关于 e^t 的特征数，则对于任意 $\varepsilon>0$,

$$\overline{\lim_{t\to\infty}}\{|f(t)|e^{(\lambda+\varepsilon)t}\}=\infty,\quad \lim_{t\to\infty}\{|f(t)|e^{(\lambda-\varepsilon)t}\}=0.$$

从第一个条件，就有使得

$$|f(t_n)|e^{(\lambda+\varepsilon)t_n}\to+\infty$$

的数列 $t_1, t_2, \cdots, t_n, \cdots\to\infty$ 的存在❷，从而

$$\log|f(t_n)|+\lambda t_n+\varepsilon t_n>1,\quad n\geqslant n_0.$$

因而对于上面的数列 $\{t_n\}$，

$$\frac{\log|f(t_n)|}{t_n}>-\lambda-\varepsilon,\quad n\geqslant n_0.$$

再从第二个条件，在所有 $t\geqslant t'$，

$$|f(t)|e^{(\lambda-\varepsilon)t}<1,$$

如果两端取对数，就有

$$\frac{\log|f(t)|}{t}<-\lambda+\varepsilon.$$

从以上两个結果得到

$$-\lambda=\overline{\lim_{t\to\infty}}\frac{\log|f(t)|}{t}.$$

---

❶ 特别地，当 $\psi(t)=e^t$ 时，此特征数 λ 就叫 Ляпунов 特征数。——譯者注

❷ 定义 $\overline{\lim\limits_{t\to\infty}}F(t)=\lim\limits_{n}\beta_n$，此处 $\beta_n=\sup\{F(t)\,|\,t>n\}$.

定理 $\overline{\lim\limits_{t\to\infty}}F(t)=\infty \rightleftarrows \exists\{t_n\}$ 使得 $t_n\uparrow\infty$, $\lim\limits_{n}F(t_n)=\infty$.

[証] ($\longrightarrow$)由假設，可知每个 $\beta_n=\infty$，因而对于 1，必有 t_{n_1}: $t_{n_1}>1$, $F(t_{n_1})>1$. 从而对于 $\max(2, F(t_{n_1}))$，必有 t_{n_2}: $t_{n_2}>\max(2, t_{n_1})$, $F(t_{n_2})>\max(2, F(t_{n_1}))$——考虑 $n>\max(2, t_{n_1})$ 这样的 β_n 即可——。于是归納地可得出所需要的 $\{t_n\}$.

($\longleftarrow$)依假設每个 $\beta_n=\infty$，从而 $\lim\limits_{n}\beta_n=\infty$，即 $\overline{\lim\limits_{t\to\infty}}F(t)=\infty$.——譯者注

注意 在无論取怎样的 $\lambda>0$，都有 $\lim\limits_{t\to\infty}|f(t)|\psi(t)^{\lambda-\varepsilon}=0$ 的情况下，定义关于 $\psi(t)$ 的，$f(t)$ 的特征数为 ∞。并且在对于任意的 $\lambda(>0)$ 都有 $\lim\limits_{t\to\infty}|f(t)|\psi(t)^{\lambda}=\infty$ 的情况下，定义特征数为 0 [1]。例如 $f(t)=1$ 的特征数为 0；$f(t)=e^{-\psi(t)}$ 的特征数为 ∞。特別地，当 $f(t)=0$ 时也是 $\lambda=\infty$。

以后我們根据 Ляпунов 特征数来討論。为了有助于关于特征数的演算，将这一方面的預备知識叙述如下。今将关于 $\psi(t)$ 的，$f(t)$ 的特征数写为 $\lambda(f)$，于是

(1) 若 c 为常数，则 $\lambda(cf)=\lambda(f)$。

(2) 若 $\lambda(f)$ 存在，则

$$\lambda(f)=-\overline{\lim_{t\to\infty}}\frac{\log|f(t)|}{\log\psi(t)}\text{ [2]}.$$

(3) $\lim(|f(t)|\psi(t)^{\lambda'-\varepsilon})=0\Leftrightarrow\lambda'\leqslant\lambda(f)$，

$\overline{\lim}(|f(t)|\psi(t)^{\lambda'+\varepsilon})=\infty\Leftrightarrow\lambda'\geqslant\lambda(f)$。

这是因为如果当 $\lim(|f|\psi^{\lambda'-\varepsilon})=0$ 时，$\lambda(f)<\lambda'$ 则有使 $\lambda(f)<\lambda(f)+\varepsilon'<\lambda'$ 成立的 $\varepsilon'>0$ 的存在。这一結果与条件(a)矛盾 [3]，因而 $\lambda'\leqslant\lambda(f)$。其逆命題是自明的 [4]。同样，当 $\overline{\lim}(|f|\psi^{\lambda'+\varepsilon})=\infty$ 时，設 $\lambda'<\lambda(f)$ 則有使 $\lambda'<\lambda(f)-\varepsilon'<\lambda$ 的 $\varepsilon'>0$ 存在。这一結果

---

[1] 这里关于特征数 0 的定义与以上特征数定义不相一致。如 $f(t)=t^t$，按此处定义，其特征数应为 0，但

$$\overline{\lim_{t\to\infty}}\frac{\log|t^t|}{t}=\overline{\lim_{t\to\infty}}\frac{t\log t}{t}=\infty.$$

此外，它与一般所規定的特征数为 $-\infty$ 的定义也有所区别。讀者至此，宜細察究竟。——譯者注

[2] 将上定理証明中 e^t 易为 $\psi(t)$ 即可。——譯者注

[3] 因 $\lambda(f)<\lambda'$，故有 $\varepsilon'>0$：$\lambda(f)+\varepsilon'=\lambda'-\varepsilon'$，于是

$$\overline{\lim_{t}}|f|\psi(t)^{\lambda(f)+\varepsilon'}=\overline{\lim_{t}}|f|\psi(t)^{\lambda'-\varepsilon'}=\lim_{t}|f|\psi(t)^{\lambda'-\varepsilon'}=0.$$

即 $\overline{\lim\limits_{t}}|f|\psi(t)^{\lambda(f)+\varepsilon'}=0$，此与(a)矛盾。——譯者注

[4] 設 $\lambda'\leqslant\lambda(f)$，則 $\lambda'-\varepsilon\leqslant\lambda(f)-\varepsilon$，从而

$$0\leqslant|f|\psi(t)^{\lambda'-\varepsilon}\leqslant|f|\psi(t)^{\lambda(f)-\varepsilon},$$

但 $\lim\limits_{t}|f|\psi(t)^{\lambda(f)-\varepsilon}=0$，因此 $\lim\limits_{t}|f|\psi(t)^{\lambda'-\varepsilon}=0$。——譯者注

又与条件(b)相反。其逆命題也是自明的。

(4) $\lambda(f_1+f_2)\geqslant\min(\lambda(f_1),\ \lambda(f_2))$，若 $\lambda(f_1)\neq\lambda(f_2)$，則

$$\lambda(f_1+f_2)=\min(\lambda(f_1),\ \lambda(f_2)).$$

这是因为，令 $\lambda(f_i)=\lambda_i(i=1,\ 2)$，再設 $\lambda_1\leqslant\lambda_2$，則

$$|f_1+f_2|\psi^{\lambda_1-\varepsilon}\leqslant|f_1|\psi^{\lambda_1-\varepsilon}+|f_2|\psi^{\lambda_2-\varepsilon},$$

因而由于特征数条件(b)成立，由(3)得到 $\lambda_1\leqslant\lambda(f_1+f_2)$。其次設 $\lambda_1<\lambda_2$ 并且設 ε 滿足 $\lambda_2-\lambda_1>2\varepsilon>0$，則

$$|f_1+f_2|\psi^{\lambda_1+\varepsilon}\geqslant\big||f_1|\psi^{\lambda_1+\varepsilon}-|f_2|\psi^{\lambda_1+\varepsilon}\big|,$$

而 $|f_2|\psi^{\lambda_1+\varepsilon}<|f_2|\psi^{\lambda_2-\varepsilon}\to0(t\to\infty)$；于是由于 f_1+f_2 当 $\lambda=\lambda_1$ 时滿足条件(a)，由(3)得到 $\lambda_1\geqslant\lambda(f_1+f_2)$。因之

$$\lambda_1=\lambda(f_1+f_2).$$

注意 $\lambda(|f_1|+|f_2|)=\lambda(c_1|f_1|+c_2|f_2|)=\min(\lambda(f_1),\ \lambda(f_2))$，此处 $c_1,\ c_2$ 是异于 0 的正的常数❶。$\lambda(f_1)\neq\lambda(f_2)$ 时，則对于非零的常数 $c_1,\ c_2$，

---

❶ 为了簡便，令 $\lambda(|f_1|+|f_2|)=\lambda$，于是

$$\lim_t(|f_1|+|f_2|)\psi^{\lambda-\varepsilon}=0,\quad \overline{\lim_t}(|f_1|+|f_2|)\psi^{\lambda+\varepsilon}=\infty,$$

而
$$0\leqslant c_1|f_1|+c_2|f_2|\leqslant c(|f_1|+|f_2|),$$

此处 $c=\max(c_1,\ c_2)$，故 $\lim(c_1|f_1|+c_2|f_2|)\psi^{\lambda-\varepsilon}=0$，由(3)

$$\lambda\leqslant\lambda(c_1|f_1|+c_2|f_2|).$$

另一方面，$\overline{\lim_t}(|f_1|+|f_2|)\psi^{\lambda+\varepsilon}=\infty$，故 $\exists\ \{t_n\}:\ t_n\uparrow\infty$，

$$\lim_{t_n\to\infty}(|f_1|+|f_2|)\psi^{\lambda+\varepsilon}=\infty\quad(\text{見第 173 頁注❷}),$$

但
$$(c_1|f_1|+c_2|f_2|)\psi^{\lambda+\varepsilon}\geqslant c'(|f_1|+|f_2|)\psi^{\lambda+\varepsilon},$$

此处 $c'=\min(c_1,c_2)$，于是 $\lim\limits_{t_n\to\infty}(c_1|f_1|+c_2|f_2|)\psi^{\lambda+\varepsilon}=\infty$，从而 $\overline{\lim_t}(c_1|f_1|+c_2|f_2|)\cdot\psi^{\lambda+\varepsilon}=\infty$ (見第 173 頁注❷)，再由(3) $\lambda\geqslant\lambda(c_1|f_1|+c_2|f_2|)$。所以

$$\lambda=\lambda(c_1|f_1|+c_2|f_2|).$$

令 $\lambda_1=\lambda(f_1)$，$\lambda_2=\lambda(f_2)$，$\lambda=\min(\lambda_1,\ \lambda_2)$，則

$$\lim|f_1|\psi^{\lambda_1-\varepsilon}=0,\ \lim|f_2|\psi^{\lambda_2-\varepsilon}=0,\ \overline{\lim}|f_1|\psi^{\lambda_1+\varepsilon}=\infty,\ \overline{\lim}|f_2|\psi^{\lambda_2+\varepsilon}=\infty.$$

由 $(|f_1|\psi^{\lambda_1-\varepsilon}+|f_2|\psi^{\lambda_2-\varepsilon})\geqslant(|f_1|+|f_2|)\psi^{\lambda-\varepsilon}\geqslant0$，得知 $\lim(|f_1|+|f_2|)\psi^{\lambda-\varepsilon}=0$，再从(3)

$$\lambda\leqslant\lambda(|f_1|+|f_2|).$$

为了确定令 $\lambda=\lambda_1$，則由 $\overline{\lim}|f_1|\psi^{\lambda_1+\varepsilon}=\infty$，可知 $\exists\ \{t_n\}:\ |f_1(t_n)|\psi(t_n)^{\lambda_1+\varepsilon}\to\infty$，

而
$$|f_1(t_n)|\psi(t_n)^{\lambda_1+\varepsilon}\leqslant(|f_1(t_n)|+|f_2(t_n)|)\psi(t_n)^{\lambda_1+\varepsilon},$$

故
$$\overline{\lim}(|f_1|+|f_2|)\psi^{\lambda_1+\varepsilon}=\infty,\ 即\ \overline{\lim}(|f_1|+|f_2|)\psi^{\lambda+\varepsilon}=\infty,$$

由(3)可知 $\lambda\geqslant\lambda(|f_1|+|f_2|)$。因之，$\lambda=\lambda(|f_1|+|f_2|)$。——譯者注

$$\lambda(c_1f_1+c_2f_2)=\min(\lambda(f_1),\ \lambda(f_2))\ ❶.$$

一般情况是

$$\lambda(f_1+f_2+\cdots+f_n)\geqslant\min(\lambda(f_1),\ \cdots,\ \lambda(f_n)),$$

$$\lambda(|f_1|+|f_2|+\cdots+|f_n|)=\min(\lambda(f_1),\ \cdots,\ \lambda(f_n)).$$

如果$\lambda(f_i)$ $(i=1,\ 2,\ \cdots,\ n)$，彼此互异，则

$$\lambda(f_1+f_2+\cdots+f_n)=\min(\lambda(f_1),\ \cdots,\ \lambda(f_n))\ ❷.$$

(5) $\lambda(f_1\cdot f_2)\geqslant\lambda(f_1)+\lambda(f_2)$，$\lambda(f^2)=2\lambda(f)$ ❸.

理由是：$\lim\limits_{t\to\infty}(|f_1f_2|\psi^{\lambda_1+\lambda_2-\varepsilon})=\lim|f_1|\psi_1^{\lambda_1-\frac{\varepsilon}{2}}|f_2|\psi_2^{\lambda_2-\frac{\varepsilon}{2}}=0$.

(6) 若$f_1,\ f_2,\ \cdots,\ f_n$有同一个特征数，则

$$c_1|f_1|+c_2|f_2|+\cdots+c_n|f_n|\quad(c_i\ \text{是正的常数})$$

也具有該特征数。

(7) 若$|f_1|\geqslant|f_2|$，則$\lambda(f_1)\leqslant\lambda(f_2)$.

理由是：　$|f_1|\psi^{\lambda_1-\varepsilon}\geqslant|f_2|\psi^{\lambda_1-\varepsilon}\to0\quad(t\to+\infty)$.

(8) $\lambda(\psi(t)^{-\alpha})=\alpha$ ❹. 特別地当$\psi(t)=e^t$时，$\lambda(e^{\gamma t})=-\gamma$.

---

❶ 因$\lambda(c_1f_1)=\lambda(f_1)$，$\lambda(c_2f_2)=\lambda(f_2)$，故由假設$\lambda(c_1f_1)\neq\lambda(c_2f_2)$，再由(4) $\lambda(c_1f_1+c_2f_2)=\min(\lambda(c_1f_1),\ \lambda(c_2f_2))=\min(\lambda(f_1),\ \lambda(f_2))$.——譯者注

❷ 假設n时命題成立，即当$\lambda(f_i)\neq\lambda(f_j)$ $(i\neq j;\ i,\ j=1,\ 2,\ \cdots,\ n)$时，

$$\lambda(f_1+f_2+\cdots+f_n)=\min(\lambda(f_1),\ \cdots,\ \lambda(f_n)).$$

今設$\lambda(f_i)\neq\lambda(f_j)$ $(i\neq j;\ i,\ j=1,\ 2,\ \cdots,\ n,\ n+1)$，則依归納假設可知

$$\lambda(f_1+f_2+\cdots+f_n)\neq\lambda(f_{n+1});$$

从而由(4) $\lambda((f_1+f_2+\cdots+f_n)+f_{n+1})=\min(\lambda(f_1+f_2+\cdots+f_n),\ \lambda(f_{n+1}))$，

即　$\lambda(f_1+f_2+\cdots+f_n+f_{n+1})=\min(\lambda(f_1+f_2+\cdots+f_n),\ \lambda(f_{n+1}))$.

再依归納假設，$\lambda(f_1+\cdots+f_{n+1})=\min\ (\min(\lambda(f_1),\ \cdots,\ \lambda(f_n)),\ \lambda(f_{n+1}))$

$$=\min(\lambda(f_1),\ \cdots,\ \lambda(f_{n+1})).\text{——譯者注}$$

❸ 由前一个命題，可知$\lambda(f^2)\geqslant2\lambda(f)$，因此只証$\lambda(f^2)\leqslant2\lambda(f)$即可。

因　$\overline{\lim\limits_{t}}|f|\psi^{\lambda(f)+\varepsilon}=\infty$，故∃$t_n\uparrow\infty$使得$\lim\limits_{n}|f(t_n)|\psi(t_n)^{\lambda(f)+\varepsilon}=\infty$，

从而　$\lim\limits_{n}|f(t_n)|^2\psi(t_n)^{2\lambda(f)+2\varepsilon}=\infty$，随之　$\overline{\lim\limits_{t}}|f|^2\psi^{2\lambda(f)+2\varepsilon}=\infty$，

再依(3)　$2\lambda(f)\geqslant\lambda(f^2)$.——譯者注

❹ 因依特征数定义，$\psi(t)\geqslant0$，且$\psi(t)\uparrow\infty$，从而

$$0=\lim_{t}\psi(t)^{-\varepsilon}=\lim_{t}|\psi(t)^{-\alpha}|\psi(\alpha)^{\alpha-\varepsilon},\quad\infty=\overline{\lim_{t}}\psi(t)^{\varepsilon}=\overline{\lim_{t}}|\psi(t)^{-\alpha}|\psi(\alpha)^{\alpha+\varepsilon},$$

而特征数唯一(由(2)可知)，因此$\alpha=\lambda(\psi^{-\alpha})$.——譯者注

将以上諸性质应用到微分方程(45.1)的解上。如沒有特别声明时，总认为 $\psi(t)=e^t$。

从而 $$\lambda(f)=-\overline{\lim_{t}}\frac{\log|f(t)|}{t}.$$

列或行向量 $y(t)=(y_1, y_2, \cdots, y_n)$ 的范是 $\|y\|=\sum|y_i|$，所以

$$\lambda(\|y\|)=\min(\lambda(y_1), \lambda(y_2), \cdots, \lambda(y_n)),$$

因之，特别当 $\lambda(y_1)=\lambda(y_2)=\cdots=\lambda(y_n)=\mu$ 时，$\lambda(\|y\|)=\mu$。

因此設(45.1)的解矩陣 Y 为 (y_{ik})，以它的 k 列元素为分量的解向量为 $y^k=(y_{1k}, y_{2k}, \cdots, y_{nk})$，則

$$\lambda(\|y^k\|)=\min_i\lambda(y_{ik}) \quad (k=1, 2,\cdots, n). \tag{45.4}$$

由于 $\|Y\|=\sum_{i,k}|y_{ik}|$，所以

$$\lambda(\|Y\|)=\min_{i,k}\lambda(y_{ik})=\min_k\lambda(\|y^k\|). \tag{45.5}$$

行列式 $|Y|$ 是各項形如 $\pm y_{k_11}y_{k_22}\cdots y_{k_nn}$ 的 $n!$ 个項的和，由(5)可得

$$\lambda(\det Y)\geqslant\min\lambda(y_{k_11}y_{k_22}\cdots y_{k_nn})\geqslant\min[\lambda(y_{k_11})+\cdots+\lambda(y_{k_nn})]$$
$$\geqslant\min\lambda(y_{k_11})+\cdots+\min\lambda(y_{k_nn}),$$

因而

$$\lambda(\det Y)\geqslant n\min_{i,k}\lambda(y_{ik})=n\min_k\lambda(\|y^k\|). \tag{45.6}$$

还有

$$\lambda(\|y^1+y^2\|)=\min_k\lambda(y_{k1}+y_{k2}),\ \lambda(y_{k1}+y_{k2})\geqslant\min(\lambda(y_{k1}), \lambda(y_{k2}))$$

或 $$=\min(\lambda(y_{k1}), \lambda(y_{k2}))\ (\text{当 } \lambda(y_{k1})\neq\lambda(y_{k2}) \text{ 时})。$$

現在設 $\lambda(\|y^1\|)\neq\lambda(\|y^2\|)$，以及为了方便設 $\lambda(\|y^1\|)<\lambda(\|y^2\|)$，由于 $\min\lambda(y_{k1})<\min\lambda(y_{k2})$，就有

$$\min_k\lambda(y_{k1}+y_{k2})=\min_k\lambda(y_{k1})$$ [1]。

---

[1] 設 $\min_k\lambda(y_{k1})=\lambda(y_{11})=a$，則 $\lambda(y_{k1})\geqslant a$，$\lambda(y_{k2})>a$ $(k=1, 2, \cdots n)$；

从而
$$\lambda(y_{11}+y_{12})=\min(\lambda(y_{11}), \lambda(y_{12}))=a,$$
$$\lambda(y_{21}+y_{22})\geqslant\min(\lambda(y_{21}), \lambda(y_{22}))=a,$$
$$\cdots\cdots\cdots\cdots,$$
$$\lambda(y_{n1}+y_{n2})\geqslant\min(\lambda(y_{n1}), \lambda(y_{n2}))=a.$$

因此，$\min_k\lambda(y_{k1}+y_{k2})=a=\min_k\lambda(y_{k1})$。——譯者注

总之 $\lambda(\|ay+bz\|) \geqslant \min(\lambda(\|y\|), \lambda(\|z\|))$. 若 $\lambda(\|y\|) \neq \lambda(\|z\|)$，則 $\lambda(\|ay+bz\|) = \min(\lambda(\|y\|), \lambda(\|z\|))$，$a$, b 为实数❶。

以$[X_i]$ $(i=1, 2, \cdots)$表示相当于定理的事項。

$[X_1]$　其特征数彼此相异的解向量不得超过 n 个。

証　今設 $\lambda(\|y^i\|)=\lambda_i$ $(i=1, 2, \cdots, n+1)$，并为了方便更設 $\{y^i\}$ 为 $\lambda_1>\lambda_2>\cdots>\lambda_{n+1}$。显然有

$$c_1y^1+c_2y^2+\cdots+c_ny^n+c_{n+1}y^{n+1}=0.$$

今从上式最后一項算起，所遇到的第一个系数异于零的項，令它的系数为 c_{p+1}，更設 $c_{p+1}=-1$，这样做并不失去一般性，因此有

$$y^{p+1}=\sum_{i=1}^{p} c_iy^i,$$

从而
$$\|y^{p+1}\| \leqslant \|c_1y^1\|+\|c_2y^2\|+\cdots+\|c_py^p\|.$$

但由前述(7)，(4)以及(1)可得 $\lambda_{p+1}\geqslant\lambda_p$。这与假設矛盾。因之定理得証。

注意　就是取关于一般的$\psi(t)$的特征数，本定理仍完全可以成立。比如假設在本节开头所述的定理的条件$\int_{t_0}^{t}\|P(\tau)\|d\tau$ 不是收斂的而是发散的，这时就可取

$$\psi(t)=\exp\left(\int_{t_0}^{t}\|P(\tau)\|d\tau\right),$$

而本定理对于此 $\psi(t)$ 也成立，这一事实具有重要的作用。

注意　当系数是 t 的函数，并且在 $t_0\leqslant t<\infty$ 有界，則上述定理最后結果仍然成立。就是說設 $z=\sum c_i(t)y^i(t)$，就有

$$\lambda(\|z\|)\geqslant\min_i \lambda(\|y^i\|).$$

注意　在微分方程組 (45.1) 的解所属的特征数中相异的个数不超过 n 个(由$[X_1]$得来)。并且因为同一个函数不能有相异的特征数，所以特征数列是解的单值函数。

---

❶ 这个命题的一般形式为：若

$$\lambda(\|y^i\|)\neq\lambda(\|y^j\|)\quad(i\neq j;\ i, k=1, 2, \cdots, n),$$

則
$$\lambda(\|c_1y^1+\cdots+c_ny^n\|)=\min_{1\leqslant i\leqslant n}\lambda(\|y^i\|). $$——譯者注

现在为了方便設特征数列为

(a) $\lambda_1 > \lambda_2 > \cdots > \lambda_k$.

取 (45.1) 的解的一个基本組(把它表为 $y^1, \cdots, y^n$), 各元素的特征数 $\lambda(\|y^i\|)$ $(i=1, 2, \cdots, n)$ 的集并不限定是上列特征数列全部, 而可以是其中的一部分。而且这些元素的任意綫性組合的特征数不比 $\min\lambda(\|y^i\|)$ 小, 特别在某种解的基本組中, 其元素的所有綫性組合的特征数与此組的构成元素的特征数相等❶, 在这种情况下, 称此組为**正常組**(normal system)。例如

(b) $p_1(t)e^{\lambda t}, p_2(t)e^{\lambda t}, \cdots, p_n(t)e^{\lambda t}$,

此处 $p_1, \cdots, p_n$ 是 t 的多項式的向量, 这样的組就是在常系数方程組的情况下出現的解的基本組, 可是此刻有

$$\lim\frac{\log|p(t)e^{\lambda t}|}{t}=R\lambda \text{ ❷ } (p(t)\text{为 } t \text{ 的多項式}) \Rightarrow \lambda(\|p_s e^{\lambda t}\|)=R\lambda.$$

从而(b)的任何一个綫性組合的特征数都是相同的。因此, (b) 构成了正常組。

再設 $z=By$, $|B|\neq 0$, B, B^{-1} 都是有界的, 就有

$$\lambda(\|z\|)=\lambda(\|By\|)\geqslant\lambda(\|B\|\|y\|)=\lambda(\|y\|),$$

同样由 $y=B^{-1}z$ 就得到 $\lambda(\|y\|)\geqslant\lambda(\|z\|)$.

如果解矩陣 $Y=(y_{ik})$ 經由綫性变換变成 Z 时, 可写为 $Z=BY$ 的形式。此处 $y^k=(y_{1k}, y_{2k}, \cdots, y_{nk})$ (列向量) 而且

$$z^k=By^k \quad (k=1, 2, \cdots, n).$$

因而得到下面的事实:

[X$_2$] 若 $z=By$(或 $Z=BY$), $|B|\neq 0$, B, B^{-1} 都是有界的, 則 $\lambda(\|z\|)=\lambda(\|y\|)$, 从而經由 B 正常組 Y 变成正常組 Z.

---

❶ 这里所說的"此組的构成元素的特征数"不知何意, 拟为"出現在組合之中的解所成的那一群函数的特征数, 即出現在此組合之中的解它們的特征数的最小值"。請讀者考慮。——譯者注

❷ 因 $\lambda=R\lambda+iJ\lambda$, 故 $|e^{\lambda t}|=e^{(R\lambda)t}$, 从而

$$\frac{\log|p(t)e^{\lambda t}|}{t}=\frac{\log|p(t)|}{t}+\frac{(R\lambda)t}{t}.$$

但 $\displaystyle\lim_{t\to\infty}\frac{\log|p(t)|}{t}=0$, 于是 $\displaystyle\lim_{t\to\infty}\frac{\log|p(t)e^{\lambda t}|}{t}=R\lambda$,

此处 $p(t)$ 是 t 的任一个多項式。——譯者注

注意 在解的正常組所有特征数全体之外，还存在着(45.1)的特征数，設它为 μ，如果 z 为(45.1)的一个滿足 $\mu=\lambda(\|z\|)$ 的解，則 z 就是正常組的元素向量的綫性組合。因而由正常組的定义，$\lambda(\|z\|)$ 不得不等于上述特征数集中的某一个。这是一个矛盾。从而正常組所有特征数以外不再存在有特征数了。就这一意义来說，把正常組叫做**极大組**(maximal system)。

[X_3] 对于方程組(45.1)的解的基本組 $y^i(i=1, 2,\cdots, n)$，有下列关系：

$$\sum_{i=1}^{n}\lambda(\|y^i\|)\leqslant\lambda\left(\exp\int_{t_0}^{t}\mathrm{tr}P(\tau)d\tau\right),\quad \mathrm{tr}P=\sum_{i=1}^{n}p_{ii}\text{❶}.$$

理由是：如果考虑以 y^i 所构成的解矩陣 Y，由(36.2)

$$|Y|=|Y(t_0)|\exp\left(\int_{t_0}^{t}\mathrm{tr}P(\tau)d\tau\right).$$

由推导(45.6)所用的不等式可以得到

$$\lambda(\det Y)\geqslant\lambda(\|y^1\|)+\cdots+\lambda(\|y^n\|),$$

另一方面

$$\lambda(\det Y)=\lambda\left(\exp\int_{t_0}^{t}\mathrm{tr}P(\tau)d\tau\right)=-\overline{\lim}\,\frac{1}{t}\int_{t_0}^{t}\sum p_{ii}(\tau)d\tau.$$

注意 可以与前面所提及的 Diliberto 論文中的証明比較一下。此处証明簡明，这是由于采用 Ляпунов 特征数定义的結果，这一点著者一直想更进一步研究才好。

其次，考虑(45.1)的共軛方程。即

$$\frac{dY}{dt}=PY,\quad \frac{dZ}{dt}=Z(-P).$$

由于共軛方程組的解向量 z 是行向量，若取两者的基本組，則如 §37 所示

$$ZY=E,\quad 即\quad \sum_{p}z_{ip}y_{pk}=\delta_{ik}.$$

特别地若取 $\delta_{ii}=1$ 的特征数，則由(4)，(5)可得

❶ 这是所謂特征数第一估計定理。——譯者注

$$0=\lambda\left(\sum_p z_{ip}y_{pi}\right)\geqslant\min_p\lambda(z_{ip}y_{pi})\geqslant\min_p[\lambda(z_{ip})+\lambda(y_{pi})]$$
$$\geqslant\min\lambda(z_{ip})+\min\lambda(y_{pi}).$$

由于 (45.4)，上式右端第二項是 $\lambda(\|y^i\|)$，而且 z^i 是行向量，所以这一最后的結果就是

$$\lambda(\|z^i\|)+\lambda(\|y^i\|).$$

因而利用 [X$_2$] 就有

[X$_4$] 在方程組

$$\frac{dy}{dt}=Py,\quad \frac{dz}{dt}=z(-P)$$

中，設 $\{y^i\}$, $\{z^i\}$ $(i=1, 2, \cdots, n)$ 为与 $ZY=C$, $|C|\neq 0$ 相对应的解的基本組，則

$$\lambda(\|y^i\|)+\lambda(\|z^i\|)\leqslant 0 \text{❶} \quad (i=1, 2, \cdots, n).$$

从这一定理的証明中可以引出下述事实:

$$\lambda(|E|)=0=\lambda(\det(ZY))\geqslant\lambda(\det Z)+\lambda(\det Y).$$

然而依 (45.5) 就有 $\lambda(\det Y)\geqslant\sum_i\lambda(\|y^i\|)$, $\lambda(\det Z)\geqslant\sum_i\lambda(\|z^i\|)$.

因而

$$0\geqslant\lambda(\det Y)+\lambda(\det Z)\geqslant\sum_i[\lambda(\|y^i\|)+\lambda(\|z^i\|)].$$

另一方面

$$\lambda(\det Y)=-\overline{\lim_{t\to\infty}}\frac{1}{t}\int_{t_0}^t \mathrm{tr}P d\tau,\quad \lambda(\det Z)=\underline{\lim_{t\to\infty}}\frac{1}{t}\int_{t_0}^t \mathrm{tr}P d\tau.$$

因而

$$\sum_i[\lambda(\|y^i\|)+\lambda(\|z^i\|)]=0\Rightarrow\overline{\lim}\frac{1}{t}\int_{t_0}^t \mathrm{tr}P d\tau=\underline{\lim}\frac{1}{t}\int_{t_0}^t \mathrm{tr}P d\tau.$$

而且若有

$$-\sum\lambda(\|y^i\|)>\lim\frac{1}{t}\int_{t_0}^t \mathrm{tr}P d\tau,$$

---

❶ 因 $ZY=C$，此处 $|C|\neq 0$，故 $Z(YC^{-1})=E$，依上已証明的結果，可知

$$0\geqslant\lambda(\|z^i\|)+\lambda(\|u^i\|),$$

此处 u^i 为 YC^{-1} 的第 i 个列向量，而 $\lambda(\|u^i\|)=\lambda(\|y^i\|)$（由于 [X$_2$] 第一个命題），于是

$$0\geqslant\lambda(\|z^i\|)+\lambda(\|y^i\|).$$——譯者注

则 $\sum_i [\lambda(\|y^i\|)+\lambda(\|z^i\|)]<0$，这是一个矛盾。因而

$$\lim \frac{1}{t}\int_{t_0}^{t} \mathrm{tr} P d\tau = -\sum \lambda(\|y^i\|) = \sum_i \lambda(\|z^i\|).$$

綜括以上所述就有

[X_5] 在上述[X_4]中，若 $\sum_i [\lambda(\|y^i\|)+\lambda(\|z^i\|)]=0$，则存在

$$\lim_{t\to\infty} \frac{1}{t}\int_{t_0}^{t} \mathrm{tr} P(\tau) d\tau$$

而且其值为
$$-\sum_{i=1}^{n} \lambda(\|y^i\|).$$

注意

$\sum_i [\lambda(\|y^i\|)+\lambda(\|z^i\|)]=0 \Leftrightarrow \lambda(\|y^i\|)+\lambda(\|z^i\|)=0 \quad (i=1, 2, \cdots, n)$ ❶.

其次，設作为考察对象的方程組为

$$\frac{dZ}{dt} = [C+Q(t)]Z \quad (|Z|\neq 0). \qquad (45.7)$$

且 $C=(c_{ik})$ 是常数矩陣，$Q=(q_{ik}(t))$ 在 $0\leqslant t<\infty$ 連續，并且

$$\|Q\| = \sum_{i,k} |q_{ik}(t)| \leqslant \rho.$$

这是相当于在(45.1)内 $P=C+Q$ 的情况，所以

$$\mathrm{tr}\, P = \mathrm{tr}\, C + \mathrm{tr}\, Q,$$

$$\exp\left(\int_0^t \mathrm{tr} P(\tau) d\tau\right) \geqslant \exp\left(-\int_0^t |\mathrm{tr}\, C| d\tau - \int_0^t |\mathrm{tr}\, Q| d\tau\right)$$
$$\geqslant \exp(-|\mathrm{tr}\, C| t - \rho t).$$

因而 Z 的 Ляпунов 特征数的和是(依(7)与[X_3])

$$\sum_{i=1}^{n} \lambda(\|z^i\|) \leqslant |\mathrm{tr}\, C| + \underline{\lim} \frac{1}{t}\int_0^t |\mathrm{tr} Q| d\tau.$$

将这一結果作为定理来叙述，就是：

---

❶ 設 $\sum_i [\lambda(\|y^i\|)+\lambda(\|z^i\|)]=0$，又由[$X_4$]，

$$\lambda(\|y^i\|)+\lambda(\|z^i\|)\leqslant 0 \quad (1\leqslant i\leqslant n),$$

则必每个
$$\lambda(\|y^i\|)+\lambda(\|z^i\|)=0 \quad (1\leqslant i\leqslant n).$$——譯者注

$[X_6]$ 在方程組(45.7)中，如果 $\|Q\|\leqslant\rho$，则

$$\sum_{i=1}^{n}\lambda(\|z^i\|)\leqslant|\mathrm{tr}\,C|+\rho\leqslant\sum_{i=1}^{n}|c_{ii}|+\rho.$$

对于最初的方程(45.1)：

$$\frac{dZ}{dt}=P(t)Z \text{ 或 } \frac{dz}{dt}=P(t)z \quad (t\geqslant 0),$$

如果 $\|P(t)\|<b$，一般說如下所述那样，就可以作出特征数的上、下估价(Poincaré 的研究)。变换 $z=e^{-\lambda t}y\,(z_i=e^{-\lambda t}y_i)$，就得到

$$\frac{dy}{dt}=(P(t)+\lambda E)y,\ \dot{y}_i=\sum_{k\neq i}{}' p_{ik}y_k+(p_{ii}+\lambda)y_i.$$

以 $\bar{y}_i$ 乘等式两端，并且关于 i 取和($\bar{y}_i$ 是 y_i 的共軛复数)，就得到

$$\begin{cases}\dfrac{1}{2}\dfrac{d}{dt}|y|^2=\mathrm{Re}[A(\lambda)+B(\lambda)]\text{❶},\quad |y|^2=\sum\limits_{i=1}^{n}|y_i|^2,\\ A(\lambda)=\sum\limits_{i=1}^{n}(p_{ii}+\lambda)|y_i|^2,\quad B(\lambda)=\sum\limits_{i=1}^{n}\Big(\sum\limits_{k\neq i}{}' p_{ik}y_k\Big)\bar{y}_i\text{❷},\\ \mathrm{Re}\text{ 表示实数部分。}\end{cases}$$

如果应用 Cauchy 不等式($[\sum|a_ib_i|]^2\leqslant\sum|a_i|^2\sum|b_i|^2$)，就有

---

❶ 因 $\frac{dy_i}{dt}=\sum' p_{ik}y_k+(p_{ii}+\lambda)y_i$，故

$$\sum_i\frac{dy_i}{dt}\bar{y}_i=\sum_i\Big(\sum' p_{ik}y_k\Big)\bar{y}_i+\sum_i(p_{ii}+\lambda)y_i\bar{y}_i=B(\lambda)+A(\lambda),$$

因此 $$\mathrm{Re}\Big(\sum_i\frac{dy_i}{dt}\bar{y}_i\Big)=\mathrm{Re}(B(\lambda)+A(\lambda)). \tag{a}$$

另一方面 $$\sum_i\frac{dy_i}{dt}\bar{y}_i+\sum_i y_i\frac{d\bar{y}_i}{dt}=\sum_i\frac{d}{dt}|y_i|^2,$$

又 $$\overline{\Big(\sum_i\frac{dy_i}{dt}\bar{y}_i\Big)}=\sum_i y_i\frac{d\bar{y}_i}{dt},$$

是以 $$2\mathrm{Re}\Big(\sum_i\frac{dy_i}{dt}\bar{y}_i\Big)=\sum_i\frac{d}{dt}|y_i|^2,$$

即 $$\mathrm{Re}\Big(\sum_i\frac{dy_i}{dt}\bar{y}_i\Big)=\frac{1}{2}\sum_i\frac{d}{dt}|y_i|^2. \tag{b}$$

(a)与(b)联合，得証。——譯者注

❷ 原书誤为 $B(\lambda)=\sum\limits_{k\neq i}p_{ik}y_k\bar{y}_i$。——譯者注

$$|B(\lambda)|^2\leqslant\sum_i\Big(\sum_{k\neq i}'|p_{ik}y_k|\Big)^2\cdot\sum_i|y_i|^2\leqslant b^2\Big(\sum|y_i|^2\Big)^2=b^2|y|^4\text{❶},$$

$$\Big|\sum p_{ii}|y_i|^2\Big|\leqslant b\sum|y_i|^2=b|y|^2.$$

今設 $\lambda_0=2b+\frac{\eta}{2}$，由于 $A(\lambda)$ 是实数，所以

$$|A(\lambda)|\geqslant(\lambda_0-b)|y|^2\text{❷},$$

$$\mathrm{Re}[A+B]\geqslant\{(\lambda_0-b)-b\}|y|^2\text{❸}=\frac{\eta}{2}|y|^2,\ \lambda\geqslant\lambda_0,\quad t\geqslant0.$$

因而

$$\frac{d|y|^2}{dt}\geqslant\eta|y|^2\Rightarrow|y|^2\geqslant|y_0|^2e^{\eta t}(\lambda\geqslant\lambda_0,\ y_0=y(0)).$$

对于 $\lambda\leqslant-\lambda_0$，$A(\lambda)<-\lambda_0|y|^2+\sum p_{ii}|y_i|^2\leqslant(-\lambda_0+b)|y|^2$，因而

$$\mathrm{Re}[A(\lambda)+B(\lambda)]\leqslant(b-\lambda_0+b)|y|^2=-\frac{\eta}{2}|y|^2.$$

从而当

$$\lambda\leqslant-\lambda_0,\quad |y|^2\leqslant|y_0|^2e^{-\eta t}.$$

因而关于原来的方程組(45.1)的解 z，有下列关系：

$$\lambda\geqslant\lambda_0,\quad |z|^2\geqslant|z_0|^2e^{(\eta-2\lambda)t},$$

---

❶ 因 $\displaystyle\sum_i\Big(\sum_{k\neq i}'|p_{ik}y_k|\Big)^2=\sum_i\Big(\sum_{k\neq i}'|p_{ik}||y_k|\Big)^2\leqslant\sum_i\Big(\Big(\sum_{k\neq i}'|p_{ik}|\Big)\sqrt{\sum_{k=1}^n|y_k|^2}\Big)^2$

$\displaystyle=\sum_i\Big(\Big(\sum_{k\neq i}'|p_{ik}|\Big)|y|\Big)^2=\sum_i\Big(\sum_{k\neq i}'|p_{ik}|\Big)^2|y|^2$

$\displaystyle=\Big(\sum_i\Big(\sum_{k\neq i}'|p_{ik}|\Big)^2\Big)|y|^2\leqslant b^2|y|^2.$——譯者注

❷ 因 $A(\lambda)=\sum_i(p_{ii}+\lambda)|y_i|^2\geqslant\sum_i(p_{ii}+\lambda_0)|y_i|^2=\sum_i p_{ii}|y_i|^2+\lambda_0\sum_i|y_i|^2$，

故　$|A(\lambda)|\geqslant\lambda_0\sum_i|y_i|^2-|\sum_i p_{ii}|y_i|^2|\geqslant\lambda_0\sum_i|y_i|^2-b|y|^2=(\lambda_0-b)|y|^2.$

——譯者注

❸ 因 $\mathrm{Re}[A+B]=\mathrm{Re}A+\mathrm{Re}B$，但 A 为实，且 $A\geqslant0$［因此时 $\lambda\geqslant\lambda_0$，而 $\lambda_0=2b+\frac{\eta}{2}$，故 $\lambda>b$，又 $|p_{ii}|\leqslant b$，故 $p_{ii}+\lambda\geqslant0$］，于是

$\mathrm{Re}[A+B]=|A|+\mathrm{Re}B\geqslant|A|-|B|\geqslant(\lambda_0-b)|y|^2-b|y|^2=(\lambda_0-b-b)|y|^2.$

——譯者注

$$\lambda \leqslant -\lambda_0, \quad |z|^2 \leqslant |z_0|^2 e^{(-\eta-2\lambda)t} \quad (t \geqslant 0).$$

如果取 $|z|^2$ 的特征数就有

$$\lambda(|z|^2)\begin{cases} \leqslant 2\lambda-\eta & (\lambda \geqslant \lambda_0)❶, \\ \geqslant 2\lambda+\eta & (\lambda \leqslant -\lambda_0). \end{cases}$$

由于 $\eta>0$ 可以任意小，所以

[X_7] 在方程組(45.1)中，如果 $\|P\|<b$，則解向量的长度的特征数 $\lambda(|z|)$ 存在于 $-2b$ 与 $+2b$ 之間，此处

$$|z| = \sqrt{|z_1|^2+\cdots+|z_n|^2}❷.$$

当考察这一定理的証明过程时，就可得(45.1)的解在 $t\to+\infty$ 时的漸近行为。由于

$$|z|^2 e^{2\lambda t} = |y|^2 \leqslant |z_0|^2 e^{-\eta t}, \quad \lambda \leqslant -\lambda_0 = -2b-\frac{\eta}{2},$$

$$|z|^2 e^{2\lambda t} = |y|^2 \geqslant |z_0|^2 e^{\eta t}, \quad \lambda \geqslant \lambda_0 = 2b+\frac{\eta}{2},$$

所以

$$|z|^2 e^{2\lambda t}, \text{ 从而 } \quad z e^{\lambda t}.$$

在 $t\to+\infty$ 时，如果 $\lambda \leqslant -\lambda_0$，則趋于零，如果 $\lambda \geqslant \lambda_0$，則趋于 ∞。

于是由于 $\eta>0$ 是任意的，結果是

$$\lim_{t\to\infty} z e^{\lambda t} = \begin{cases} 0 & (\lambda < -2b), \\ \infty & (\lambda > 2b). \end{cases}$$

从这一結果也可以推断[X_7]的正确性。例如，若設 $\mu=\lambda(|z|)>2b$ 就产生矛盾。理由是，如果取 $\varepsilon>0$ 滿足 $2\varepsilon<\mu-2b$ 时，就有

---

❶ 特别地取 $\lambda=\lambda_0$, $\lambda=-\lambda_0$，于是有

$$\lambda(|z|^2) \leqslant 2\lambda_0-\eta \text{ 以及 } -2\lambda_0+\eta \leqslant \lambda(|z|^2);$$

但 $\lambda_0=2b+\frac{\eta}{2}$，从而

$$-4b \leqslant \lambda(|z|^2) \leqslant 4b.$$

此結果与 В. В. Немыцкий, В. В. Степанов: 微分方程定性論，第三章，§ 3，定理 8 相比，似为优越。——譯者注

❷ 利用上注❶以及(5)中第二个命題即可。——譯者注

$$e^{(\mu-\varepsilon)t}|z|=e^{(2b+\varepsilon)t}|z|e^{(\mu-2b-2\varepsilon)t}\to+\infty\quad(t\to\infty)$$ ❶

因而 $\mu\leqslant 2b$。

同样，如果設 $\mu<-2b$ 也会引出矛盾，因而 $\mu\geqslant-2b$，所以

$$-2b\leqslant\lambda(|z|)\leqslant 2b.$$

注意 如果方程組 (45.1) 的系数矩陣 $P=(p_{ik})$ 随着 $t\to+\infty$ 而趋于 0 $(P(t)\to 0)$，則这一組的解的特征数等于零❷。

其次，任意給定一个使

$$\int_{t_0}^{t}\rho(t)dt\uparrow+\infty\quad(t\to\infty)$$

的 $\rho(t)$，并且以 $\tau=\int_{t_0}^{t}\rho(t)dt$ 将組(45.1)的参数 t 变换为 τ，就有

$$\frac{dz}{d\tau}=Qz,\ Q(\tau)=\frac{1}{\rho(t)}P(t),\ q_{ik}=\frac{p_{ik}}{\rho}.$$

因而若 $Q(\tau)\to 0$，当 $\tau\to\infty$，則关于

$$e^{\tau}=\exp\left(\int_{t_0}^{t}\rho(t)dt\right)$$

的 $|z|$ 的特征数，由上述注意，就是零。由这一結果，得出

［X_8］ 若 $\|P(t)\|<at^{-\alpha}(a>0,\ \alpha>1,\ t\geqslant t_0>0)$，則 (45.1) 的解的关于函数 $\frac{t}{t_0}$ 的 $\lambda(|z|)$ 等于零。

理由是：設 $\rho(t)=\frac{1}{t}$，則

$$\|Q(\tau)\|<at^{1-\alpha}\to 0\quad(t\to\infty),$$

因而由上述注意，关于 $e^{\tau}=\frac{t}{t_0}$，$\lambda(|z|)=0$。

---

❶ 因 $2b+\varepsilon>2b$，故依此处結論 $\lim\limits_{t\to\infty}e^{(2b+\varepsilon)t}|z|=\infty$，又

$$\mu-2b-2\varepsilon>0,\quad 故\quad e^{(\mu-2b-2\varepsilon)t}\geqslant 1,$$

因此，$\quad e^{(2b+\varepsilon)t}|z|e^{(\mu-2b-2\varepsilon)t}$ 即 $e^{(\mu-\varepsilon)t}|z|\longrightarrow+\infty\ (t\to\infty)$

但这与 $\mu=\lambda(|z|)$ 的定义中的 (b) $\lim\limits_{t\to\infty}\{|z|e^{t(\mu-\varepsilon)}\}=0$ 矛盾。——譯者注

❷ ［X_7］之成立，不必限定 $t_0=0$，对于一般的 t_0：$t_0>0$ 皆可。因此在 $b\to 0$ 下，$\lambda(|z|)=0$。但 $\lambda(z)=\lambda(|z|)$，故即 $\lambda(z)=0$。——譯者注

以下介紹 Perron 的研究❶。

設

$$\frac{dy_i}{dt}=p_i(t)y_i+\sum_{k=1}^{n}p_{ik}(t)y_k \quad (t\geqslant t_0) \tag{45.8}$$

作为所考虑的方程組。但是

$$\left.\begin{array}{ll}\text{a)} & \operatorname{Re}p_1>\operatorname{Re}p_i(t)+c \quad (i\neq 1;\ c>0);\\ \text{b)} & \lim p_{ik}(t)=0 \quad (t\to\infty).\end{array}\right\} \tag{45.9}$$

今設 $|\eta_1|>|\eta_i|$，并設在 $t=t_1(>t_0)$ 的初始条件为 $y(t_1)=(\eta_1,\eta_2,\cdots,\eta_n)$. 由方程(45.8)可得

$$|\bar{y}_i\dot{y}_i-p_i(t)|y_i|^2|\leqslant\sum_{k=1}^{n}|p_{ik}y_k\bar{y}_i|.$$

如果注意到 $2\operatorname{Re}\bar{y}_i\dot{y}_i=\frac{d}{dt}|y_i|^2$，就可知

$$\text{c)}\quad -\sum_k|p_{ik}y_k\bar{y}_i|\leqslant\frac{1}{2}\frac{d}{dt}|y_i|^2-\operatorname{Re}p_i|y_i|^2\leqslant\sum_k|p_{ik}y_k\bar{y}_i| \text{❷}.$$

由假定条件 b)，使得 $|p_{ik}|\leqslant\frac{c}{2n}$，$t\geqslant t_1$ 的 t_1 是存在的，所以卽命起初的 t_1 取这样的值，因而在 $t\geqslant t_1$ 处

$$\text{d)}\qquad \operatorname{Re}p_i(t)|y_i|^2-\frac{c}{2n}\sum_k|y_ky_i|$$
$$\leqslant\frac{1}{2}\frac{d}{dt}|y_i|^2\leqslant\operatorname{Re}p_i(t)|y_i|^2+\frac{c}{2n}\sum_k|y_ky_i| \text{❸}.$$

利用这一不等式，对于所有的 i，就有

$$\text{e)}\qquad |y_1(t)|^2\geqslant|y_i(t)|^2 \quad (t\geqslant t_1)$$

成立。反之，則至少要有一个 i 使得函数 $\varphi_i(t)=|y_1(t)|^2-|y_i(t)|^2$，$\varphi_i(t_1)>0$，在 $t(>t_1)$ 处成为負的，所以使得

$$0=\varphi_k(t_2)\leqslant\varphi_i(t_2) \quad (t_1<t_2,\ i\neq 1,\ k)$$

---

❶ 卽以下 [X_{11}]，它的意义在于用方程組系数来計算解的特征数。——譯者注

❷ 因 $|\operatorname{Re}\bar{y}_i\dot{y}_i-\operatorname{Re}p_i|y_i|^2|\leqslant|\bar{y}_i\dot{y}_i-p_i|y_i|^2|$.——譯者注

❸ 因 $|\bar{y}_i|=|y_i|$ 及 $|y_ky_i|=|y_k||y_i|$.——譯者注

成立的 k 与最小的 t_2 是存在的[1]，显然 $\dot{\varphi}_k(t_2)<0$。因而由 d) 可得

$$\operatorname{Re} p_1(t_2)|y_1(t_2)|^2-\frac{c}{2}|y_1(t_2)|^2\leqslant\left(\frac{1}{2}\frac{d}{dt}|y_1|^2\right)_{t_2}$$

$$\leqslant\left(\frac{1}{2}\frac{d}{dt}|y_k|^2\right)_{t_2}\leqslant\operatorname{Re} p_k(t_2)|y_k(t_2)|^2+\frac{c}{2}|y_k(t_2)|^2,$$

$$|y_k(t_2)|^2=|y_1(t_2)|^2,$$

即

$$|y_1(t_2)|^2[\operatorname{Re} p_1(t_2)-\operatorname{Re} p_k(t_2)-c]\leqslant 0.$$

但是 $|\varphi_i(t_2)|^2\geqslant 0$ 就是 $|y_1(t_2)|^2-|y_i(t_2)|^2\geqslant 0$，由此可以得到，若 $y_1(t_2)=0$，則 $y(t_2)=0$ 即 $y(t)\equiv 0$[2]，因而 $y_1(t_2)\neq 0$。从而

$$\operatorname{Re} p_1(t_2)\leqslant\operatorname{Re} p_k(t_2)+c\text{[3]}.$$

这一結果与假設条件 a) 矛盾，因而 e) 成立。

以下要証明虽然 $\dfrac{|y_i|}{|y_1|}\leqslant 1$，可是

$$\lim_{t\to\infty}\frac{|y_i|}{|y_1|}=0\quad(i=2,\ 3,\ \cdots,\ n).$$

假定这一結論不成立（对于某一个 k 来說），則 $\overline{\lim}\left|\dfrac{y_k}{y_1}\right|^2=\alpha>0$

---

[1] 証 e) 只考慮情况 $1<i\leqslant n$ 即可，再依 φ_i 定义，即証：$\varphi_i(t)\geqslant 0$ 对于每个 $t(>t_1)$，$1<i\leqslant n$。

假設此命題不成立，至少有几个比如 $\varphi_j(t)$ 等使得 $\varphi_j(t)<0$ 于某个 $t(>t_1)$。由于連續函数性，$\exists\ t_{2(j)}(>t_1)$：

$$\varphi_j(t)\begin{cases}\geqslant 0 & \\ =0 & \text{当} \\ <0 & \end{cases}\begin{matrix}t<t_{2(j)},\\ t=t_{2(j)},\\ t>t_{2(j)}.\end{matrix}$$

令 $\min\{t_{2(j)}\}=t_{2(k)}$，于是此处所要的 t_2 即此 $t_{2(k)}$，而所要的 φ_k 即此 φ_k，且显然可知此 $k\neq 1$。

依 t_2 定义，$\varphi_k(t_2)=\varphi_k(t_{2(k)})=0$；又 $\varphi_i(t_2)$ 必然 $\geqslant\varphi_k(t_2)$，当 $i\neq 1, k$，如不然，t_2 不得为 $\{t_{2(j)}\}$ 的最小值了。——譯者注

[2] $y_1(t_2)\neq 0$，如不然，$y_1(t_2)=y_2(t_2)=\cdots=y_n(t_2)=0$，从而此解組 $\{y_1,\cdots,y_n\}$ 于 $t=t_2$ 处取初值 $\{0,0,\cdots,0\}$；另一方面，此方程組的平凡解于 $t=t_2$ 处也取初值 $\{0,0,\cdots,0\}$，依解之唯一性定理，此解組成为平凡解即 $y=0$，此为不可能，因为此解組于 $t=t_1$ 处取值并非 $(0,0,\cdots,0)$。——譯者注

[3] 注意依以上所述，此处 $k\neq 1$。——譯者注

$(\alpha\leqslant 1)$。这就是說有这样的 $\{\tau_n\}$ 随同 $\tau_1<\tau_2<\cdots<\tau_n<\cdots\to\infty$，$|y_k(\tau_i)|^2/|y_1(\tau_i)|^2\uparrow\alpha$。因而使得

$$\left|\frac{y_k}{y_1}\right|^2>\frac{\alpha}{2},\quad \frac{d}{dt}\left|\frac{y_k}{y_1}\right|^2\geqslant 0>-\frac{c\alpha}{2}$$

成立的 t 的值 $\tau_1'<\tau_2'<\cdots\to+\infty$ 存在❶。

然而应用 c) 于

$$\frac{d}{dt}\left|\frac{y_k}{y_1}\right|^2=\frac{1}{|y_1|^2}\frac{d}{dt}|y_k|^2-\frac{|y_k|^2}{|y_1|^4}\frac{d}{dt}|y_1|^2 ❷,$$

就有

$$\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\left|\frac{y_k}{y_1}\right|^2\leqslant \operatorname{Re}p_k\left|\frac{y_k}{y_1}\right|^2+\sum_s\left|p_{ks}\frac{y_s\bar{y}_k}{|y_1|^2}\right|$$
$$-\operatorname{Re}p_1\left|\frac{y_k}{y_1}\right|^2+\sum_s\frac{|p_{1s}y_s\bar{y}_1|\,|y_k|^2}{|y_1|^4},$$

或

$$\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\left|\frac{y_k}{y_1}\right|^2+\operatorname{Re}(p_1-p_k)\left|\frac{y_k}{y_1}\right|^2\leqslant\sum_s|p_{ks}|+\sum_s|p_{1s}|.$$

特别在 $t=\tau_i'$ 处就有

$$-\frac{c\alpha}{4}+c\cdot\frac{\alpha}{2}=\frac{c\alpha}{4}\leqslant\sum_s(|p_{ks}|+|p_{1s}|).$$

这一結果与假設条件 b) 矛盾。

从(45.8)可直接得到

$$\left|\frac{\dot{y}_1}{y_1}-p_1\right|=\left|\sum_k p_{1k}\frac{y_k}{y_1}\right|<\sum|p_{1k}|\to 0\quad(t\to\infty).$$

綜合以上結果，就得到

[X_9] 在 a)❸，b) 两条件下存在着(45.8)的解，使得

$$\lim_{t\to\infty}\frac{y_i}{y_1}=0,\quad \lim_{t\to\infty}\left(\frac{\dot{y}_1}{y_1}-p_1\right)=0.$$

---

❶ 由于 $|y_k/y_1|$ 連續的緣故，但 $\{\tau_n'\}$ 与 $\{\tau_n\}$ 未必一致。——譯者注

❷ 将 c) 分别应用于 $\frac{d}{dt}|y_k|^2$ 及 $\frac{d}{dt}|y_1|^2$ 上，再与此等式相結合即可得出下面不等式。——譯者注

❸ 由于 [X_9] 的結論与 a) 中"c"无关，因此 a) 中"$>$"也可易为"$\geqslant$"。——譯者注

設置　a′) $\mathrm{Re}\,p_i(t) \geqslant \mathrm{Re}\,p_{i+1}(t)+c \quad (i=1, 2, \cdots, n-1)$,
以代替条件 a)，則有如下的定理：

[X_{10}]　在方程組(45.8)

$$\frac{dY}{dt}=Q(t)Y, \quad Q(t)=(\delta_{ik}p_i(t)+p_{ik}(t))$$

中，給定假設条件 a′), b) 之后，就存在着使得

$$\lim_{t\to\infty}\frac{y_{ik}}{y_{kk}}=0 \quad (i\neq k), \quad \lim_{t\to\infty}\left(\frac{y'_{kk}}{y_{kk}}-p_k\right)=0$$

成立的解的基本組 $Y=(y_{ik})$。

理由是：令 $y_i=y_{i1}(i=1, 2, \cdots, n)$，依[$X_9$]存在着使

$$\lim\frac{y_{i1}}{y_{11}}=0, \quad \lim\left(\frac{y'_{11}}{y_{11}}-p_1(t)\right)=0$$

成立的解 y。然后令

$$y_{i2}=y_{i1}v+z_{i-1}, \quad z_0\equiv 0$$

將(45.8)变形，于是有

$$y_{11}\dot v=\sum_{k=2}^{n}p_{1k}z_{k-1},$$

$$\dot z_{i-1}=p_iz_{i-1}+\sum_{k=2}^{n}\left(p_{ik}-p_{1k}\frac{y_{i1}}{y_{11}}\right)z_{k-1} \text{[1]} \quad (i=2, 3, \cdots, n).$$

---

[1] 从 $\frac{dY}{dt}=QY$，可知 $\frac{dy_{i2}}{dt}=p_iy_{i2}+\sum_{k=1}^{n}p_{ik}y_{k2}$，而

$$\frac{dy_{i2}}{dt}=y_{i1}\frac{dv}{dt}+\frac{dy_{i1}}{dt}v+\frac{dz_{i-1}}{dt},$$

于是　$$y_{i1}\frac{dv}{dt}+\frac{dy_{i1}}{dt}v+\frac{dz_{i-1}}{dt}=p_i(y_{i1}v+z_{i-1})+\sum_{k=1}^{n}p_{ik}(y_{k1}v+z_{k-1}),$$

即　$$y_{i1}\frac{dv}{dt}+\frac{dz_{i-1}}{dt}+\frac{dy_{i1}}{dt}v=p_iz_{i-1}+\sum_{k=2}^{n}p_{ik}z_{k-1}+\left(p_iy_{i1}+\sum_{k=1}^{n}p_{ik}y_{k1}\right)v,$$

但　$$\frac{dy_{i1}}{dt}=p_iy_{i1}+\sum_{k=1}^{n}p_{ik}y_{k1},$$

因此　$$y_{i1}\frac{dv}{dt}+\frac{dz_{i-1}}{dt}=p_iz_{i-1}+\sum_{k=2}^{n}p_{ik}z_{k-1},$$

故由此得出　$$y_{11}\frac{dv}{dt}=\sum_{k=2}^{n}p_{1k}z_{k-1} \quad (\text{因 } z_0\equiv 0),$$

从而　$$y_{i1}\left(\frac{\sum_{k=2}^{n}p_{1k}z_{k-1}}{y_{11}}\right)+\frac{dz_{i-1}}{dt}=p_iz_{i-1}+\sum_{k=2}^{n}p_{ik}z_{k-1},$$

于是　$$\frac{dz_{i-1}}{dt}=p_iz_{i-1}+\sum_{k=2}^{n}\left(p_{ik}-p_{1k}\frac{y_{i1}}{y_{11}}\right)z_{k-1}.$$ ——譯者注

由于有$\left(p_{ik}-p_{1k}\frac{y_{i1}}{y_{11}}\right)\to 0(t\to\infty)$，所以对于$z=(z_1, \cdots, z_{n-1})$可以应用[$X_9$]，也就是說使得

$$\lim \frac{z_i}{z_1}=0, \quad \lim\left(\frac{\dot{z}_1}{z_1}-p_2\right)=0$$

成立的z是存在的。由此就得到[X_{10}]对于y^2是成立的❶。以下返复应用这一証法就可以証明命題在一般情况下也是成立的❷。

应用[X_{10}]就可以証明 Perron 定理。

[X_{11}] 在方程組(45.1)

---

❶ 因 $\frac{dy_{22}}{dt}=p_2y_{22}+\sum_{i=1}^{n}p_{2i}y_{i2}$，故 $\frac{\dot{y}_{22}}{y_{22}}=p_2+\sum_{i=1}^{n}p_{2i}\frac{y_{i2}}{y_{22}}$，

即 $\frac{\dot{y}_{22}}{y_{22}}-p_2=\sum_{i=1}^{n}p_{2i}\frac{y_{i2}}{y_{22}}$，因此，只証 $\lim\limits_{t\to\infty}\frac{y_{i2}}{y_{22}}=0$ 就够了。

1° $\lim\limits_{t\to\infty}\frac{z_1}{y_{11}}=0$，从而可知 $\lim\limits_{t\to\infty}v(t)=0$.

因 $\lim\left(\frac{\dot{y}_{11}}{y_{11}}-p_1\right)=0$，故 $\frac{\dot{y}_{11}}{y_{11}}=p_1+\varepsilon_1$，此处 $\lim\varepsilon_1=0$，从而 $y_{11}=c_1e^{\int_a^t(p_1+\varepsilon_1)dt}$；

因 $\lim\left(\frac{\dot{z}_1}{z_1}-p_2\right)=0$，同此可得 $z_1=c_2e^{\int_a^t(p_2+\varepsilon_2)dt}$，此处 $\lim\varepsilon_2=0$. 于是

$$\left|\frac{z_1}{y_{11}}\right|=\left|\frac{c_2}{c_1}\right|e^{\int_a^t(\mathrm{Re}p_2-\mathrm{Re}p_1)+\mathrm{Re}(\varepsilon_2-\varepsilon_1)dt}\leqslant\left|\frac{c_2}{c_1}\right|e^{-c(t-a)+\int_a^t\mathrm{Re}(\varepsilon_2-\varepsilon_1)dt}$$
$$\leqslant\left|\frac{c_2}{c_1}\right|e^{(-c+\eta)(t-a)},$$

此处 $\left|\int_a^t\mathrm{Re}(\varepsilon_2-\varepsilon_1)dt\right|\leqslant\eta(t-a)$，故当$t$足够大时，可使 $-c+\eta<0$. 而

$v=\sum_{k=2}^{n}\int_a^t p_{1k}\frac{z_{k-1}}{y_{11}}dt$，于是由以上不等式可知 $\int_a^\infty\left|\frac{z_1}{y_{11}}\right|$ 收斂；再由 $p_{1k}\to 0$，以及 $\frac{z_k}{z_1}\to 0$，継而可知 $v(t)\to 0$.

2° $\lim\frac{y_{11}\dot{v}}{z_1}=0$.

因 $y_{11}\dot{v}=\sum_{k=2}^{n}p_{1k}z_{k-1}$，故 $\frac{y_{11}\dot{v}}{z_1}=\sum_{k=2}^{n}p_{1k}\frac{z_{k-1}}{z_1}$，而 $\lim\frac{z_{k-1}}{z_1}=0$，$p_{1k}\to 0$，所以

$$\frac{y_{11}\dot{v}}{z_1}\to 0.$$

3° $\lim\frac{y_{12}}{z_1}=0$.

$$\frac{dY}{dt}=P(t)Y,\quad P=(p_{ik}),\quad t\geqslant t_0,$$

中，如果有

$$\lim p_{ik}=0\quad (i\neq k),\quad \operatorname{Re}(p_{i-1,i-1}(t)-p_{ii}(t))\geqslant c,\quad c>0,$$

则 y^k 的特征数为

$$\lambda_k=\lambda(\|y^k\|)=-\overline{\lim}\frac{1}{t}\int_{t_0}^{t}\operatorname{Re}p_{kk}(\tau)d\tau.$$

理由是：由[X_{10}]的結果得到 $|y_{ik}(t)|<|y_{kk}(t)|$ 以及

$$\int_{t_0}^{t}\operatorname{Re}p_{kk}dt-\varepsilon(t-t_0)+\log|y_{kk}(t_0)|\leqslant\log|y_{kk}(t)|$$

因　$\lim\frac{y_{12}}{z_1}=\lim\frac{y_{11}v}{z_1}$　[因 $y_{i2}=y_{i1}v+z_{i\cdot 1}$，故特别地 $y_{12}=y_{11}v$]

$$=\lim\frac{v}{\frac{z_1}{y_{11}}}=\lim\frac{\frac{y_{11}}{z_1}\dot{v}}{\frac{z_1'}{z_1}-\frac{y_{11}'}{y_{11}}}\left[\begin{array}{l}\text{由于}\lim v=0,\ \lim\frac{z_1}{y_{11}}=0,\\ \text{故此处行施 L'Hospital 法则}\end{array}\right]$$

$$=0\left[\text{注意}\quad\lim\left(\frac{\dot{y}_{11}}{y_{11}}-p_1\right)=0,\quad\lim\left(\frac{\dot{z}_1}{z_1}-p_2\right)=0,\ \text{以及}\ \operatorname{Re}p_1\geqslant\operatorname{Re}p_2+c\right].$$

4°　$\lim\frac{y_{i2}}{z_1}=0$.

因　$$\frac{y_{i2}}{z_1}=\frac{y_{i1}v+z_{i\cdot 1}}{z_1}=\frac{y_{i1}}{z_1}v+\frac{z_{i-1}}{z_1}=\frac{y_{i1}}{z_1}\frac{y_{12}}{y_{11}}+\frac{z_{i-1}}{z_1}=\frac{y_{i1}}{y_{11}}\frac{y_{12}}{z_1}+\frac{z_{i-1}}{z_1}.$$

5°　当 $t\to\infty$，$\frac{z_1}{y_{22}}$ 有界。

因　$$\frac{z_1}{y_{22}}=\frac{z_1}{y_{21}v+z_1}=\frac{z_1}{y_{21}\frac{y_{12}}{y_{11}}+z_1}=\frac{1}{1+\frac{y_{21}}{z_1}\cdot\frac{y_{12}}{y_{11}}}=\frac{1}{1+\frac{y_{21}}{y_{11}}\cdot\frac{y_{12}}{z_1}},$$

而 $\frac{y_{21}}{y_{11}}\to 0$，$\frac{y_{12}}{z_1}\to 0$.

6°　$\lim\frac{y_{i2}}{y_{22}}=0$.

因　$$\frac{y_{i2}}{y_{22}}=\frac{y_{i2}}{z_1}\cdot\frac{z_1}{y_{22}}\to 0.$$——譯者注

❷　关于本定理的完整証明可参看張学銘等：微分方程稳定性理論讲义 138～142 页。——譯者注

$$\leqslant \int_{t_0}^{t} \operatorname{Re} p_{kk} dt + \varepsilon (t - t_0) + \log |y_{kk}(t_0)| \text{❶},$$

于是就有

$$\lambda(|y_{ik}|) \geqslant \lambda(|y_{kk}|), \quad \lambda(|y_{kk}|) = -\overline{\lim} \frac{1}{t} \int_{t_0}^{t} \operatorname{Re} p_{kk} dt.$$

由(45.4)可得

$$\lambda(\|y^i\|) = -\overline{\lim} \frac{1}{t} \int_{t_0}^{t} \operatorname{Re} p_{kk} dt.$$

注意 如果 $P(t)$ 具有 $\lim p_{ik}(t) = 0$, $i \neq k$ 的性质,则叫做殆对角矩陣。

在两个方程組

$$\frac{dx}{dt} = Px, \quad \frac{dy}{dt} = Qy$$

中,对于 $\lim(P(t) - Q(t)) = 0$ 从而也即 $\lim(p_{ik}(t) - q_{ik}(t)) = 0$ 这一情况的探討,特别是其中一个方程組有常数矩陣时,得到了特征数相等即 $\lambda(\|x\|) = \lambda(\|y\|)$ 这一事实❷。我覺得一般說来是沒有更进一步的結論的,这也許由于著者用功不够吧。

本节主要是参考 S. P. Diliberto 的論文写出的,可是写后面部分也参考了 V. V. Nemitsky and V. V. Stepanov: Qualitative Theory of Differential Equations (即 B. B. Немыцкий, B. B. Степанов: 微分方程定性論)。但是此书的証明中有几处不够清楚,因而有(45.4)那样的預备事項。我期待着讀者的意見❸。

---

❶ 由[X_{10}]可知,当 t 足够大时,$\left|\frac{\dot{y}_{kk}}{y_{kk}} - p_{kk}\right| \leqslant \varepsilon$,即 $\left|\frac{d}{dt} \log y_{kk} - p_{kk}\right| \leqslant \varepsilon$,从而更 $\left|\operatorname{Re} \frac{d}{dt} \log y_{kk} - \operatorname{Re} p_{kk}\right| \leqslant \varepsilon$, 即 $\left|\frac{d}{dt} \operatorname{Re} \log y_{kk} - \operatorname{Re} p_{kk}\right| \leqslant \varepsilon$,但 $\operatorname{Re} \log y_{kk} = \log |y_{kk}|$, 所以 $\left|\frac{d}{dt} \log |y_{kk}| - \operatorname{Re} p_{kk}\right| \leqslant \varepsilon$, 即

$$\operatorname{Re} p_{kk} - \varepsilon \leqslant \frac{d}{dt} \log |y_{kk}| \leqslant \operatorname{Re} p_{kk} + \varepsilon,$$

将上不等式积分卽得。——譯者注

❷ 可参看 B. B. Немыцкий, B. B. Степанов: 微分方程定性論,上册,199~200頁(中譯本),或張学銘等:微分方程稳定性理論讲义,144~145頁。——譯者注

习　　题 (第4章到第7章)

1. 試論力学系

$$\dot{x}=x^3,\quad \dot{y}=y^3$$

的运动。特别,平衡点有什么性质? 并以这一运动与力学系

$$\dot{x}=x^3(x+y-1),\quad \dot{y}=y^3(x+y-1)$$

的运动作比較。

2. 試論力学系

$$\dot{x}=y+|y|,\quad \dot{y}=-x+|x|$$

的运动。

3. 試对应相空間 (θ, φ) 及現实空間 (x, y, z) 借以說明在圓环面 $x=(r+a\cos\theta)\cos\varphi,\ y=(r+a\cos\theta)\sin\varphi,\ z=a\sin\theta$ 上以

$$\dot{\varphi}=1,\quad \dot{\theta}=\alpha \text{ (有理数或无理数)}$$

定义的力学系的运动。

4. $$\dot{x}^2=1-x^2,\quad \dot{y}^2=x^2.$$

5. 如果对于 $\dot{x}_i=f_i(x_1, x_2, x_3)$ 定义了

$$\varphi_i(x)=\begin{cases} 1 & (\text{在}|f_i(x)|\leqslant 1\text{ 之处}),\\ \dfrac{1}{f_i(x)} & (\text{在 } f_i(x)>1\text{ 之处}),\\ -\dfrac{1}{f_i(x)} & (\text{在 } f_i(x)<-1\text{ 之处}),\end{cases}$$

当命 $\varphi(x)=\varphi_1(x)\varphi_2(x)\varphi_3(x)$ 之后,就有 $|f_i(x)\varphi(x)|\leqslant 1$.

如此则方程組 $\dot{y}_i=f_i(y)\varphi(y)$ 与原来的方程組等价而且右端是有界的。在这一情况下可将 t 拓展到 $+\infty$ (或 $-\infty$). 并且試証,随弧长 $s\to+\infty$,

---

❹ 关于特征指数理論的近代工作可参看文献:

(1) Былов Б. Ф., О Характеристинных Числах Решений Систем Линейных Дифференциальных Уравнений, ПММ. XIV, (4), (1950).

(2) Виноград Р. Э., О Центральном Характеристическом Показателе Системы Дифференциальных Уравнений, Матем. сб. т. 42 (84). (1957).

(3) Богданов Ю. С., Характеристических Числах Дифференциальных Уравнений, Матем. сб. 43 (85), (1957).

(4) 張学銘, 关于特征指数的重合問題。科学記录, 新輯第2卷, 第11期, (1958). ——校者注

$t\to+\infty$。

特别对方程組 $\dot{x}=\frac{1}{x-1}$, $\dot{y}=\frac{1}{y-1}$,

試用上述一般理論进行討論。

6. 試証无論从什么点出发，在有限时間內总不能到达力学系的平衡点。

7. $$\left.\begin{aligned}t\dot{y}_1&=2y_1-y_2,\\ t\dot{y}_2&=2y_1-y_2.\end{aligned}\right\}$$

8. 如果偏微分方程

$$\sum_{i=1}^{n}\frac{\partial u}{\partial x_i}f_i(x_1, \cdots, x_n)=1$$

具有单值的解 $u(x_1, \cdots, x_n)$，則以方程組

$$\dot{x}_i=f_i(x)\quad(i=1, 2, \cdots, n)$$

定义的力学系可以直綫化。換言之，命 $p=(x_1,\cdots,x_n)$, $u(p)=u(x_1,\cdots,x_n)$, 并設力学系的运动的軌道为 $x=f(p, t)$, 就有

$$u(f(p, t))=u(p)+t.$$

9. 如果 $\sum_{i=1}^{n}\left(\frac{\partial F}{\partial x_i}\right)^2\geqslant k^2>0$, 則下列方程組可以直綫化：

$$\frac{dx_i}{dt}=\frac{\partial F}{\partial x_i}\quad(i=1, 2, \cdots, n)\quad(\text{Hamilton 方程}).$$

10. 应用(8)的結果試将下列方程組直綫化：

$$\dot{x}=kx-y,\quad \dot{y}=x+ky.$$

11. 試求下列两方程組的特征数：

$$\begin{cases}\dfrac{dx}{dt}=[\sin\log(t+1)+\cos\log(t+1)]x,\\[2mm] \dfrac{dy}{dt}=[-\sin\log(t+1)+\cos\log(t+1)]y;\end{cases}$$

$$\begin{cases}\dfrac{dx}{dt}=[\sin\log(t+1)+\cos\log(t+1)]x,\\[2mm] \dfrac{dy}{dt}=[-\sin\log(t+1)+\cos\log(t+1)]y+\dfrac{a}{t+1}x.\end{cases}$$

此处 a 是常数，$t\geqslant 0$。

12. 在方程組的特征数的和 $\sum_{i=1}^{n}\lambda(\|y^i\|)$ 等于 $\exp\left(\int_{t_0}^{t}\operatorname{tr}P\,dt\right)$ 的特征数的情况下，称 $\dot{Y}=PY$ 为規则組。試問下列方程組

$$\begin{cases} \dot{x}=x\cos\log t+y\sin\log t, \\ \dot{y}=x\sin\log t+y\cos\log t \end{cases}$$

是否是規則的。

13．試証明在常系数方程組中特征数与改了正負号的特征指数相等。

14．在 $B=\operatorname{diag}(B_1, B_2, \cdots, B_r)$ 中，特征根 $\lambda=\alpha+i\beta$ 及共軛复数特征根 $\alpha-i\beta$ 存在时，在 B_k 中有

$$B^{(1)}=\begin{pmatrix} \lambda-\alpha-i\beta & 1 & & & 0 \\ & \lambda-\alpha-i\beta & 1 & & \\ & & \ddots & \ddots & \\ & & & & 1 \\ 0 & & & & \lambda-\alpha-i\beta \end{pmatrix},$$

$$B^{(2)}=\begin{pmatrix} \lambda-\alpha+i\beta & 1 & & & 0 \\ & \lambda-\alpha+i\beta & 1 & & \\ & & \ddots & \ddots & \\ & & & & 1 \\ 0 & & & & \lambda-\alpha+i\beta \end{pmatrix}$$

式样的共軛复数矩陣。求証：不动其他矩陣，可将 $B^{(1)}$, $B^{(2)}$ 合并为

$$B^{(3)}=\operatorname{diag}(B^{(1)}, B^{(2)}),$$

并且可以将 $B^{(3)}$ 变成

$$C=\begin{pmatrix} \alpha-\lambda & -\beta & & & & \\ \beta & \alpha-\lambda & -1 & & & 0 \\ & & \alpha-\lambda & -\beta & & \\ & & \beta & \alpha-\lambda & -1 & \\ & 0 & & & \alpha-\lambda & -\beta \\ & & & & \beta & \alpha-\lambda \end{pmatrix}.$$

特别对于两个方程构成的方程組，求証可以变换成：

$$\begin{pmatrix} \dot{x} \\ \dot{y} \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}\to\begin{pmatrix} \dot{u} \\ \dot{v} \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} \alpha & -\beta \\ \beta & \alpha \end{pmatrix}\begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix}.$$

15．在常系数方程組中

$$\frac{d}{dt}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}$$

存在着等于0的特征数，試探討这一情况下解的行为。

16. 設有方程組

$$x\frac{dY}{dx}=YQ,$$

但是 $q_{ik}(x)=a_{ik}+a'_{ik}x+a''_{ik}x^2+\cdots$ （在 $x=0$ 的邻域解析），

这就是說 $Q=A_0+A_1x+A_2x^2+\cdots$, A_p 是常数矩陣，特别是 $A_0=(a_{ik})$, $A_1=(a'_{ik})$, $\cdots$。求这一方程組的形如

$$Y=x^W(E+C_1x+C_2x^2+\cdots)$$

(W, C_p 是矩陣)的解就有下列关系：

$$W=A_0,\quad A_0C_k-C_kA_0+kC_k=C_{k-1}A_1+\cdots+C_1A_{k-1}+A_k.$$

并且特别当 A_0 相似于 $\operatorname{diag}(\rho_1, \rho_2, \cdots, \rho_n)$ （特征方程 $|\rho E-A_0|=0$ 的根彼此全是相异的），如果选得适当的常数矩陣 S，則原方程組經由 $Y=Y_1S$ 可化为

$$x\frac{dY_1}{dx}=Y_1(B_0+B_1x+B_2x^2+\cdots).$$

此处

$$B_0=\operatorname{diag}(\rho_1, \rho_2, \cdots, \rho_n),\quad B_k=SA_kS^{-1}.$$

試求这一轉化了的方程組的形如

$$Y_1=x^{W_1}(E+D_1x+D_2x^2+\cdots)$$

的解。

17. 方程組 $\frac{dY}{dx}=Y\sum_{j=1}^{m}\frac{U_j}{x-a_j}$ (U_j 是常数矩陣) 的解中，如将在 $x=b$ (不同于任何一个 a_j) 处成为 E 的解写成 $Y(b;x)$，則

$$Y(b;x)=E+\int_b^x Y(b;x)\sum\frac{U_j}{x-a_j}dx.$$

由此用逐次逼近法求 $Y(b;x)$，設 $Y_0=E$，就有

$$Y_n(x)=E+\int_b^x Y_{n-1}(x)\sum\frac{U_j}{x-a_j}dx.$$

此时

$$Y(b;x)=Y_0+\sum_{n=1}^{\infty}Z_n,\quad Z_n=Y_n(x)-Y_{n-1}(x),$$

此处

$$Z_n(x)=\int_b^x Z_{n-1}(x)\sum\frac{U_j}{x-a_j}dx,\quad Z_0=E.$$

由此可以求出 $Z_n(x)$，特别可以先計算 Z_1, Z_2 等从而类推一般的 Z_n 的形式。試用所得結果判断矩陣級数 $Y_0+\sum Z_n$ 的收斂性。

18．試在积分路綫是一般的形式的情况下（如围繞 a_j 轉一周那样），討論上述問題。

19．試考慮两个方程构成的方程組

$$\frac{dY}{dx}=YT=Y\left(T_0+\frac{T_1}{x}+\frac{T_2}{x^2}+\cdots\right),\quad T_k \text{ 为常数矩陣。}$$

在选得适当的常数矩陣 S 后，可以有 $Y=Y_1S$ 的变换，使得 T_0 是可化为 Jordan 形式的，因此在这里就直接設 T_0 是 Jordan 形式的。試考慮在此形式中 $T_0=\mathrm{diag}(a_1, a_2)$ 这一特别情况。此处設 a_1, a_2 的实部是互不相同的：$\mathrm{Re}\,a_1>\mathrm{Re}\,a_2$。$T=(t_{ik})$ 从而

$$t_{ii}=a_i+\sum_{s=1}^{\infty}t_{ii}^{(s)}\frac{1}{x^s},\quad t_{ik}=\sum_{s=1}^{\infty}t_{ik}^{(s)}\frac{1}{x^s}.$$

今設

$$T=P_0+P,\quad P_0=\mathrm{diag}\left(a_1+t_{11}^{(1)}\frac{1}{x},\ a_2+t_{22}^{(1)}\frac{1}{x}\right),$$

則 P 的元素是

$$p_{ii}=\sum_{s=2}^{\infty}t_{ii}^{(s)}\frac{1}{x^s},\quad p_{ik}=\sum_{s=1}^{\infty}t_{ik}^{(s)}\frac{1}{x^s}.$$

于是設

$$Y=e^{\int_1^x P_0dx}Z=\exp\{\mathrm{diag}(a_1x+t_{11}^{(1)}\log x-a_1,\ a_2x+t_{22}^{(1)}\log x-a_2)\}Z$$

就有

$$\frac{dZ}{dx}=ZP_0-P_0Z+ZP.$$

为了应用逐次逼近法，代替这一方程而导入参数 λ，令

$$\frac{dZ}{dx}=ZP_0-P_0Z+\lambda ZP,\quad Z=\sum Z_m\lambda^m,$$

就有

$$\frac{dZ_m}{dx}=Z_mP_0-P_0Z_m+Z_{m-1}P,\quad Z_m=(z_{ik}^{(m)}),\quad Z_0=E.$$

即

$$\frac{dz_{ik}^{(m)}}{dx}=\exp(a_kx+t_{kk}^{(1)}\log x-a_k)z_{ik}^{(m)}$$

$$-\exp(a_ix+t_{ii}^{(1)}\log x-a_i)z_{ik}^{(m)}+\sum_{s=1}^{2}z_{is}^{(m-1)}p_{sk},$$

或

$$z_{ik}^{(m)}=e^{-r_{ik}}\int e^{r_{ik}}\sum_{s=1}^{2}z_{is}^{(m-1)}p_{sk}\,dx,\quad r_{ik}=(a_i-a_k)x+(t_{ii}^{(1)}-t_{kk}^{(1)})\log x.$$

試由此証明級数

$$\sum_{m=0}^{\infty}|z_{ik}^{(m)}| \text{ 在 } x_0\leqslant x<\infty \text{ 是一致收斂的,}$$

并且可以写出

$$\begin{cases} y_{ik}=e^{a_i x}x^{t_{ii}^{(0)}}z_{ik}, \\ z_{ik}=o\left(\dfrac{1}{x}\right), \quad z_{ii}=1+o\left(\dfrac{1}{x}\right). \end{cases}$$

試应用以上的論述于方程

$$y''+\left(a_0+\frac{a_1}{x}+\frac{a_2}{x^2}+\cdots\right)y'+\left(b_0+\frac{b_1}{x}+\frac{b_2}{x^2}+\cdots\right)y=0$$

(設 $y_1=y$, $y_2=y'$). 此时

$$T_0=\begin{pmatrix} 0 & -b_0 \\ 1 & -a_0 \end{pmatrix}, \text{ 特征方程: } \lambda^2+a_0\lambda+b_0=0.$$

20. 把方程

$$L(y)\equiv y^{(n)}(x)+p_1(x)y^{(n-1)}(x)+\cdots+p_n(x)y(x)=f(x), \tag{1}$$

的解定义向量,与矩陣

$$[y]=\begin{pmatrix} y(x) \\ y'(x) \\ \vdots \\ y^{(n-1)}(x) \end{pmatrix}, \qquad [Y]=\begin{pmatrix} Y_0(x) & Y_1(x) & \cdots & Y_{n-1}(x) \\ Y_0'(x) & Y_1'(x) & \cdots & Y_{n-1}'(x) \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ Y_0^{(n-1)}(x) & Y_1^{(n-1)}(x) & \cdots & Y_{n-1}^{(n-1)}(x) \end{pmatrix},$$

特別将在初始端 $x=a$ 成为

$$[Y(a)]=E$$

的綫性无关的解矩陣($f\equiv 0$ 时的)設为 $[Y(x)]$(这是所謂解的标准組),然則在初始端 $x=a$ 取

$$[y(a)]$$

形式的(1)的解向量可写为

$$[y(x)]=[Y(x)][y(a)]+[Y^*(x)],$$

此处 $[Y^*]$ 是(1)的零解,即 $[Y^*(a)]=0$.

特别当(1)具有常系数而且是齐次型($f\equiv 0$)时,特征方程就是

$$F(\lambda)\equiv\sum_{i=0}^{n}p_i\lambda^{n-i}, \quad p_0=1.$$

可以把特征根写成 λ_s. 今以 η 为参数,滿足

$$[y(a)]=\begin{pmatrix}1\\ \eta\\ \eta^2\\ \vdots\\ \eta^{n-1}\end{pmatrix}$$

的解可从

$$\frac{F(\lambda)-F(\eta)}{(\lambda-\eta)F'(\lambda)}e^{\lambda(x-a)}$$

的殘数計算(residue calculus)来求。另一方面，可以写出

$$y(x)=Y_0(x)\eta^0+Y_1(x)\eta^1+\cdots+Y_{n-1}(x)\eta^{n-1}.$$

$\{Y_i\}$是标准組。試由此写出实际的 $Y_i(x)$ 的形式。并且下列等式

$$\frac{d}{dx}Y_0(x)=-p_nY_{n-1}(x),\quad \frac{d}{dx}Y_k(x)=Y_{k-1}(x)-p_{n-k}Y_{n-1}(x)$$

是成立的。

21．試証明在习題(20)的方程(1)的解中，滿足所給(在 $x=a$ 时)初始条件而直到它的 $(n-1)$ 阶导数都具有所給的振幅(第一种間断点)的解可以用下列形式給出：

$$y(x)=\sum_{k=0}^{n-1}y^{(k)}(a)Y_k(x)+\sum_{k=0}^{n-1}\sum_{j=1}^{m_k}S(x,a_{kj})\Delta_j^{(k)}Y_k(x-a_{kj})$$
$$+\int_a^x Y_{n-1}(x-s+a)f(s)ds. \tag{2}$$

但是設　$y^{(\nu)}(x)$　$(\nu=0,1,\cdots,n-1)$，在 m_ν 个点 $x=a_{\nu j}$ $(j=1,2,\cdots,m_\nu)$ 处具有振幅：$y^{(\nu)}(a_{\nu j}+0)-y^{(\nu)}(a_{\nu j}-0)=\Delta_j^{(\nu)}$.

$S(x,a_{\nu j})$是单位函数(Heaviside 单位函数)：

$$S(x,a_{\nu j})=\begin{cases}0 & (x<a_{\nu j});\\ 1 & (x\geqslant a_{\nu j}).\end{cases}$$

特别有，設

$$y^{(\nu)}(a)=\Delta_0^{(\nu)}\quad(\nu=0,1,\cdots,n-1)\quad(a_{k0}=a,\ k=0,1,\cdots,n-1),$$

(2)就是

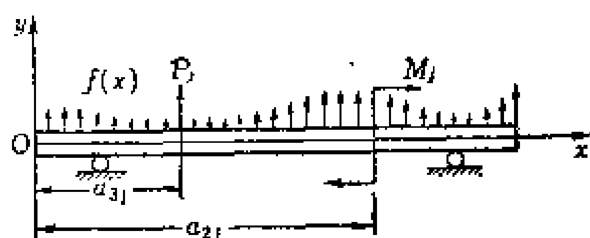
$$y(x)=\sum\sum S(x,a_{kj})\Delta_j^{(k)}Y_k(x-a_{kj})+Y^*(x). \tag{3}$$

更在間断点 $a_{\nu j}=a_j(\nu=0,1,\cdots,n-1)$时，有

$$[y(x)]=\sum_{j=0}^{m}S(x,a_j)[Y(x-a_j)][\Delta_j]+[Y^*(x)],$$

但是$[\Delta_j]=(\Delta_j^{(0)},\Delta_j^{(1)},\cdots,\Delta_j^{(n-1)})$ —— 列向量(振幅向量)。

22．习題 (21) 可以应用到各种結构力学問題上。



例如考虑具有常截面的杆件在外力作用下的弯曲問題：

$$y^{(4)}=f(x)/EJ$$

($y(x)$是杆件的軸的撓度，EJ 是截面的撓曲剛度，$f(x)$是分布于梁的单位长度上的荷載)。

特征方程 $F(\lambda)\equiv\lambda^4=0$，特征根 $\lambda=0$（四重根）。因而如果应用 (20) 的結果，就有

$$Y_3(x)=\frac{1}{3!}\frac{\partial^3}{\partial\lambda^3}(e^{\lambda x})_{\lambda=0}=\frac{x^3}{3!},$$

$$Y_2=Y_3'=\frac{x^2}{2!},\quad Y_1=Y_2'=\frac{x}{1!},\quad Y_0=Y_1'=1.$$

所以

$$Y^*(x)=\int_0^x\frac{(x-s)^3}{3!}f(s)\,ds.$$

由于撓矩是 M_j，切力是 P_j，所以导数的振幅是

$$\Delta_j^{(2)}=M_j/EJ,\quad \Delta_j^{(3)}=P_j/EJ.$$

第8章[1] 周 期 組

在以下两章中考虑具有实参数 μ 的方程組

$$\frac{dx_i}{dt}=\sum_{j=1}^{n}a_{ij}x_j+f_i(t)+\mu F_i(t,x_1,\cdots,x_n,\mu)\quad(i=1,2,\cdots,n),$$

自变数 t 取实数値，并且 a_{ij} 是实常数，f_i, F_i 在无特别声明时，是实数值的函数。

在本章中設 f_i 及 F_i 具有一定的而与 i 无关的周期(为了方便設周期为 2π)，則当 μ 值充分小时，上述方程是否具有周期 2π 的解，以及这样的解若存在其求法如何等等这些問題，就成为主要的研究課题。以下使用矩陣符号(参照第4章)。例如可将上述方程組(或簡单地称为方程)写成如下形式：

$$\frac{dx}{dt}=Ax+f(t)+\mu F(t,\ x,\ \mu).$$

以下两章的主要参考資料是：

E. A. Coddington and N. Levinson: Theory of ordinary differential equations.

И. Г. Малкин: Некоторые задачи теории нелинейных колебаний.

§46 常系数綫性方程

从最簡单的情况(綫性)开始。

考虑 A 为 n 阶常数矩陣，而 $f(t)$ 是其分量为周期 2π 的連續函数的 n 維向量的方程

---

[1] 第8～9章由古屋执笔。——原书注

$$\frac{dx}{dt}=Ax+f(t). \tag{46.1}$$

这一方程的通解是

$$x(t)=e^{At}c+x^*(t),\quad x^*(t)=\int_0^t e^{A(t-s)}f(s)ds, \tag{46.2}$$

此处 c 为常数向量❶。

(46.1)的解中，我們所要考慮的是有无具有同于 $f(t)$ 的周期为 2π 的解。

为了使得由(46.2)所給出的解是以 2π 为周期的充分必要条件就是 $x(2\pi)=x(0)$，也就是如 E 表示 n 阶单位矩陣时，

$$(e^{2\pi A}-E)c=-x^*(2\pi)\text{❷}. \tag{46.3}$$

当 $f(t)\neq 0$ 时，如果行列式 $\det(e^{2\pi A}-E)\neq 0$，则(46.3)只有唯一的一个解 $c^0=-(e^{2\pi A}-E)^{-1}x^*(2\pi)$。此时 $e^{At}c^0+x^*(t)$ 就是(46.1)的具有以 2π 为周期的唯一的一个解。

在一般情况下，当矩陣 B 的特征值为 λ 时，$e^{2\pi B}-E$ 的特征值就是 $e^{2\pi\lambda}-1$，而矩陣 C 具有特征值 0 与 $\det C=0$ 是等价的，所以 $\det(e^{2\pi A}-E)=0$ 与"A 以 $\sqrt{-1}$ 的整数倍为其特征值"是等价的。所以有

定理1 当 A 不具有形如 $N\sqrt{-1}$(N 是整数)的特征值时，(46.1)具有唯一的一个周期为 2π 的解。

---

❶ 参照第4章 §35 (35.3)。——譯者注

❷ $x(t)=x(t+2\pi)\rightleftarrows e^{A(t+2\pi)}c-e^{At}c=x^*(t)-x^*(t+2\pi)\rightleftarrows e^{At}(e^{A2\pi}-E)c$
$=x^*(t)-\int_0^{t+2\pi}e^{A(t+2\pi-s)}f(s)ds=x^*(t)-\left\{\int_0^{2\pi}e^{A(t+2\pi-s)}f(s)ds\right.$
$\left.+\int_{2\pi}^{t+2\pi}e^{A(t+2\pi-s)}f(s)ds\right\}=x^*(t)-\left\{\int_0^{2\pi}e^{A(t+2\pi-s)}f(s)ds+\int_0^t e^{A(t-u)}f(u)du\right\}$
$=x^*(t)-\int_0^{2\pi}e^{A(t+2\pi-s)}f(s)ds-x^*(t)=-\int_0^{2\pi}e^{A(t+2\pi-s)}f(s)ds$
$=-e^{At}\int_0^{2\pi}e^{A(2\pi-s)}f(s)ds=-e^{At}x^*(2\pi)\rightleftarrows(e^{A2\pi}-E)c=-x^*(2\pi)\rightleftarrows e^{A2\pi}c-Ec$
$=-x^*(2\pi)\rightleftarrows e^{A2\pi}c+x^*(2\pi)=Ec\rightleftarrows x(2\pi)=x(0)$.——譯者注

例1 $\frac{d^2x}{dt^2}+c\frac{dx}{dt}+k^2x=e\sin t\ \ (k>0)$.

命 $y=\frac{dx}{dt}$ 而化原方程为方程組的形式后，則 $A=\begin{pmatrix}0 & 1\\ -k^2 & -c\end{pmatrix}$.

A 的特征値就是 $\lambda(\lambda+c)+k^2=0$ 的两个根。

当 $c\neq 0$ 或"$c=0$ 而 k 不是整数"时，这两个根不是 $N\sqrt{-1}$ (N 是整数) 的形式，所以方程只有唯一的一个周期为 2π 的解。

$c=0$ 而且 $k=1$ 时，方程无周期为 2π 的解（通解是 $c_1\cos t+c_2\sin t-(e/2)t\sin t$）。但是 $c=0$ 而 k 为 $\geqslant 2$ 的整数时，所有解都是周期为 2π 的解（通解是 $c_1\cos kt+c_2\sin kt+e(k^2-1)^{-1}\sin t$）。

当考虑一般情况时，設 n 阶矩陣 $e^{2\pi A}-E$ 的秩为 $k=n-m$: $\rho(e^{2\pi A}-E)=k=n-m$. 此时齐次方程 $\frac{dx}{dt}=Ax$ 恰好有 m 个綫性无关的周期为 2π 的解❶。設它們是 $\varphi^{(1)}, \varphi^{(2)}, \cdots, \varphi^{(m)}$. [$\frac{dx}{dt}=Ax$ 的通解可以写成 $x=e^{At}c$. 綫性方程組 $(e^{2\pi A}-E)c=0$ 恰好有 m 个綫性无关解 $c^{(1)},\cdots,c^{(m)}$❷. 此时命 $\varphi^{(i)}=e^{At}c^{(i)}$,則 $\varphi^{(1)},\cdots,\varphi^{(m)}$ 是 $\frac{dx}{dt}=Ax$ 的綫性无关的解。并且如果在 $\frac{dx}{dt}=Ax$ 的解中有周期为 2π 的解 φ 时，命它为 $e^{At}c$, 則此 c 必为 $c^{(1)}, \cdots, c^{(m)}$ 的綫性組合,所以 φ 可以由 $\varphi^{(1)}, \cdots, \varphi^{(m)}$ 綫性組合表出。]

同样 $\frac{dy}{dt}=-A'y$ 也恰好有 m 个綫性无关的周期为 2π 的解❸。設它們是 $\psi^{(1)}, \psi^{(2)}, \cdots, \psi^{(m)}$.

---

❶ 理由見下文方括号內所叙述的。——譯者注

❷ n 阶矩陣 $e^{2\pi A}-E$ 的秩为 $n-m<n$，則綫性齐次方程組 $(e^{2\pi A}-E)c=0$ 的解空間为 $n-(n-m)=m$ 維，从而它具有 m 个綫性无关解 $c^{(1)}, c^{(2)}, \cdots, c^{(m)}$. 再依 (46.3) 所滿足的性質，$x(t)=e^{At}c^{(i)}=\varphi^{(i)}$ $(i=1,2,\cdots,m)$ 应是 $\frac{dx}{dt}=Ax$ 的周期为 2π 的解。——譯者注

❸ 因 $(e^{2\pi A}-E)'=e^{2\pi A'}-E$，故由 $\rho(e^{2\pi A}-E)=n-m\to\rho(e^{2\pi A'}-E)=n-m$，于是 $\frac{dy}{dt}=A'y$ 应有 m 个綫性无关的周期为 2π 的解，从而 $\frac{dy}{dt}=-A'y$ 也应如此。

——譯者注

設 $\Phi(t)$ 是以 $\varphi^{(i)}$ 为第 i 列的 (n, m) 矩陣，$\Psi(t)$ 是以 $\psi^{(i)}$ 为第 i 列的 (n, m) 矩陣：

$$\Phi=(\varphi^{(1)}\cdots\varphi^{(m)}),\quad \Psi=(\psi^{(1)}\cdots\psi^{(m)}). \tag{46.4}$$

此时由于

$$\frac{d}{dt}(\Psi'\Phi)=\left(\frac{d}{dt}\Psi'\right)\Phi+\Psi'\frac{d}{dt}\Phi=-(\Psi'A)\Phi+\Psi'(A\Phi)=0,$$

所以

$$\Psi'(t)\Phi(t)\text{是常数矩陣。} \tag{46.5}$$

同样由于 $\frac{d}{dt}(\Psi' e^{At})=0$ ❶，所以下面的等式成立：

$$\Psi'(t)e^{At}=\Psi'(s)e^{As} \text{ ❷}. \tag{46.6}$$

定理 2 使方程(46.1)具有以 2π 为周期的解的充分而且必要条件是

$$\int_0^{2\pi}\Psi'(t)f(t)dt=0. \tag{46.7}$$

証明 为了使(46.1)具有以 2π 为周期的解，

$$(e^{2\pi A}-E)c=-\int_0^{2\pi}e^{A(2\pi-t)}f(t)dt \tag{46.8}$$

就是充分必要条件。若以 $\Psi'(2\pi)$ 左乘上式，由 (46.6) 就得到 $(\Psi'(0)-\Psi'(2\pi))c=-\int_0^{2\pi}\Psi'(t)f(t)dt$ ❸，由于 $\Psi'(0)=\Psi'(2\pi)$，所以(46.7)成立。

反之，若(46.7)成立，則(46.8)右端的向量与 $\psi^{(1)}(2\pi)$, $\psi^{(2)}(2\pi)$,

---

❶ 因 $\frac{d}{dt}\Psi' e^{At}=\left(\frac{d}{dt}\Psi'\right)e^{At}+\Psi'\frac{d}{dt}e^{At}=-(\Psi'A)e^{At}+\Psi'Ae^{At}=0$ 的緣故。——譯者注

❷ 由上，可令 $\Psi' e^{At}=K$，此处 K 为常数矩陣。特別地，令 $t=s$，于是有 $\Psi'(s)e^{As}=K$，从而 $\Psi'(t)e^{At}=\Psi'(s)e^{As}$。——譯者注

❸ 原书等式右端漏一"−"号。——譯者注

$\cdots,\psi^{(m)}(2\pi)$正交❶。一方面，$e^{2\pi A}-E$的任何一列都与$\psi^{(1)}(2\pi)$，$\psi^{(2)}(2\pi)$，…，$\psi^{(m)}(2\pi)$正交❷。从而将(46.8)的右端的向量作为第$(n+1)$列而附加到$e^{2\pi A}-E$后所得到的$(n,\ n+1)$矩陣的秩不超过$n-m$❸. 另一方面，因为$e^{2\pi A}-E$的秩是$n-m$，所以(46.8)

---

❶ 因 $\Psi'(2\pi)(-1)\int_0^{2\pi}e^{A(2\pi-t)}f(t)\,dt=-\int_0^{2\pi}\Psi'(2\pi)e^{2\pi A}e^{-At}f(t)\,dt=-\int_0^{2\pi}\Psi'(t)f(t)\,dt=0$，故得出

$$\psi^{(1)}(-1)\int_0^{2\pi}e^{A(2\pi-t)}f(t)\,dt=0,\quad \psi^{(2)}(-1)\int_0^{2\pi}e^{A(2\pi-t)}f(t)\,dt=0,\ \cdots,$$

$$\psi^{(m)}(-1)\int_0^{2\pi}e^{A(2\pi-t)}f(t)\,dt=0.$$ ——譯者注

❷ 因 $\Psi'(2\pi)(e^{2\pi A}-E)=\Psi'(2\pi)e^{2\pi A}-\Psi'(2\pi)E=\Psi'(2\pi)e^{2\pi A}-\Psi'(0)E=0$，

即
$$\begin{pmatrix}\psi_{11}(2\pi)b_{11}+\cdots+\psi_{n1}(2\pi)b_{n1} & \cdots & \psi_{11}(2\pi)b_{1n}+\cdots+\psi_{n1}(2\pi)b_{nn}\\ \cdots\cdots & \cdots & \cdots\cdots\\ \psi_{1m}(2\pi)b_{11}+\cdots+\psi_{nm}(2\pi)b_{n1} & \cdots & \psi_{1m}(2\pi)b_{1n}+\cdots+\psi_{nm}(2\pi)b_{nn}\end{pmatrix}=0,$$

此处$(b_{ij})=e^{2\pi A}-E$，$\psi_{ji}(2\pi)=\psi_j^{(i)}(2\pi)$. ——譯者注

❸ 为了簡便，令$\psi_{ij}=\psi_{ij}(2\pi)$，$-\int_0^{2\pi}e^{A(2\pi-t)}f\,dt=\begin{pmatrix}g_1\\ \vdots\\ g_n\end{pmatrix}$，于是依上述結果有

$$\begin{cases}\psi_{11}b_{11}+\cdots+\psi_{n1}b_{n1}=0,\\ \cdots\cdots\\ \psi_{11}b_{1n}+\cdots+\psi_{n1}b_{nn}=0,\end{cases}\ \cdots\ \begin{cases}\psi_{1m}b_{11}+\cdots+\psi_{nm}b_{n1}=0,\\ \cdots\cdots\\ \psi_{1m}b_{1n}+\cdots+\psi_{nm}b_{nn}=0,\end{cases}\ \begin{cases}\psi_{1m}g_1+\cdots+\psi_{n1}g_n=0,\\ \cdots\cdots\\ \psi_{1m}g_1+\cdots+\psi_{nm}g_n=0.\end{cases}$$

从而有

$$\begin{cases}\psi_{11}b_{11}+\cdots+\psi_{n1}b_{n1}=0\\ \cdots\cdots\\ \psi_{11}b_{1n}+\cdots+\psi_{n1}b_{nn}=0\\ \psi_{11}g_1+\cdots+\psi_{n1}g_n=0\end{cases}\ \cdots\ \begin{cases}\psi_{1m}b_{11}+\cdots+\psi_{nm}b_{n1}=0,\\ \cdots\cdots\\ \psi_{1m}b_{1n}+\cdots+\psi_{nm}b_{nn}=0,\\ \psi_{1m}g_1+\cdots+\psi_{nm}g_n=0.\end{cases}$$

于是綫性齐次方程組
$$\begin{cases}b_{11}x_1+\cdots+b_{n1}x_n=0,\\ \cdots\cdots\\ b_{1n}x_1+\cdots+b_{nn}x_n=0,\\ g_1x_1+\cdots+g_nx_n=0\end{cases}$$

有解$\psi^{(1)},\cdots,\psi^{(m)}$. 务须注意此处$m$个$\psi^{(i)}$即$\psi^{(i)}(2\pi)$仍是綫性无关的(从$\psi^{(i)}(t)$的定义)。

故$\begin{pmatrix}b_{11} & \cdots & b_{n1}\\ \cdots & \cdots & \cdots\\ b_{1n} & \cdots & b_{nn}\\ g_1 & \cdots & g_n\end{pmatrix}$的秩$\leqslant n-m$，不然方程組綫性无关解的个数将$<m$，此为不可能。

从而
$$\begin{pmatrix}b_{11} & \cdots & b_{1n} & g_1\\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots\\ b_{n1} & \cdots & b_{nn} & g_n\end{pmatrix}$$ 的秩$\leqslant n-m$。

但$\rho(e^{2\pi A}-E)=\rho([b_{ij}])=n-m$，故

$$\begin{pmatrix}b_{11} & \cdots & b_{1n} & g_1\\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots\\ b_{n1} & \cdots & b_{nn} & g_n\end{pmatrix}$$ 的秩$=n-m$。——譯者注

的解 c 是存在的❶。 証毕

但是，若 (46.7) 成立，(46.1) 周期为 2π 的解就有无限多个。这就是說如果 $x^{(0)}(t)$ 是一个周期为 2π 的解，則 (46.1) 的周期为 2π 的解都可以表成 $c_1\varphi^{(1)}+c_2\varphi^{(2)}+\cdots+c_m\varphi^{(m)}+x^{(0)}(t)$，其中 c_1, c_2, $\cdots$, c_m 是任意常数❷。在此，从这些周期为 2π 的解中选出特别的一个来加以考虑。

設

$$\varphi^{(1)},\ \varphi^{(2)},\ \cdots,\ \varphi^{(m)},\ \bar{x}^{(m+1)},\ \cdots,\ \bar{x}^{(n)} \tag{46.9}$$

是 $\dfrac{dx}{dt}=Ax$ 的綫性无关的解。此时 (46.1) 的任意的解可以写为

$$c_1\varphi^{(1)}+\cdots+c_m\varphi^{(m)}+c_{m+1}\bar{x}^{(m+1)}+\cdots+c_n\bar{x}^{(n)}+\int_0^t e^{A(t-s)}f(s)ds,$$

其中 c_1, $\cdots$, c_n 是任意常数❸。为了使得它具有周期 2π，就不得不有下一等式成立：

$$c_{m+1}(\bar{x}^{(m+1)}(2\pi)-\bar{x}^{(m+1)}(0))+\cdots+c_n(\bar{x}^{(n)}(2\pi)-\bar{x}^{(n)}(0))$$
$$+\int_0^{2\pi} e^{A(2\pi-s)}f(s)ds=0. \tag{46.10}$$

存在着满足上一关系的 c_{m+1}, $\cdots$, c_n 这一事实显然是由周期为 2π 的解的存在就可明白，可是这样的 c_{m+1}, $\cdots$, c_n 也只有一組。实际上，如果 c'_{m+1}, $\cdots$, c'_n 也满足上一条件，則 $(c'_{m+1}-c_{m+1})\bar{x}^{(m+1)}(t)+$

---

❶ 綫性非齐次方程組的系数矩陣与扩大系数矩陣的秩相等之方程組有解。——譯者注

❷ 因为 (46.7) 成立，所以 $\psi^{(1)},\cdots,\psi^{(m)}$，从而 $\varphi^{(1)},\cdots,\varphi^{(m)}$ 的 $m\neq 0$，且 (46.1) 具有一个周期为 2π 的解 x^0。作 $c_1\varphi^{(1)}+\cdots+c_m\varphi^{(m)}+x^0$，則此为 (46.1) 的周期为 2π 的解，由于 $c_1,\cdots,c_m$ 的任意性，是以这样的解有无穷多个。至于此时 (46.1) 的任何一个周期为 2π 的解 x 可化为这样的形式，这是由于 $x-x^0$ 为 $\dfrac{dx}{dt}=Ax$ 的周期 2π 的解从而当与 $\varphi^{(1)},\cdots,\varphi^{(m)}$ 綫性相关的緣故。——譯者注

❸ 因 $x=e^{At}c+x^*$，而 $e^{At}c$ 当与 $\varphi^{(1)},\cdots,\varphi^{(m)},\bar{x}^{(m+1)},\cdots,\bar{x}^{(n)}$ 綫性相关，即

$$e^{At}c=c_1\varphi^{(1)}+\cdots+c_m\varphi^{(m)}+c_{m+1}\bar{x}^{(m+1)}+\cdots+c_n\bar{x}^{(n)},$$

故 $x=c_1\varphi^{(1)}+\cdots+c_m\varphi^{(m)}+c_{m+1}\bar{x}^{(m+1)}+\cdots+c_n\bar{x}^{(n)}+x^*$.——譯者注

$+\cdots+(c_n'-c_n)\bar{x}^{(n)}(t)$ 就是 $\dfrac{dx}{dt}=Ax$ 的周期为 2π 的解，而且由(46.9)的綫性无关性，就不得不有 $c_{m+1}'=c_{m+1}$, $\cdots$, $c_n'=c_n$ 成立。

我們把这样决定的(46.1)的特定的周期解表成 $L(t,f)$，则

$$L(t,\ f)=c_{m+1}\bar{x}^{(m+1)}+\cdots+c_n\bar{x}^{(n)}+\int_0^t e^{A(t-s)}f(s)ds. \quad (46.11)$$

并且在 $m=n$ 的情况下，上式最后的积分项就是 $L(t,\ f)$.

定理3 (46.11)的 $L(t,\ f)$ 具有下述性质：

$1°$ 如果 $f(t)$, $g(t)$ 是連續的，而且具有周期 2π，則对于常数 a, b 有下关系成立：

$$L(t,\ af+bg)=aL(t,\ f)+bL(t,\ g).$$

$2°$ 如果 $f(t)$ 含有参数 α_1, $\cdots$, α_p，并且关于这些参数是可微分到某阶的，則 $L(t,\ f)$ 关于这些参数也是同阶可微的。

$3°$ 如果 $|f_s(t)|<M$ (M 是常数)，則 $|L_s(t,\ f)|<aM$. 此处 a 是与 f 无关的常数。

証明 由(46.10)可以知道 $c_i\ (m+1\leqslant i\leqslant n)$ 可以

$$\int_0^{2\pi} e^{A(2\pi-s)}f(s)ds$$

的分量的齐次一次式所表出。由这一事实直接可知 $1°$, $2°$ 成立。其次，因为 $L(t,\ f)$ 是关于 t 以 2π 为周期的，所以可在 $0\leqslant t\leqslant 2\pi$ 上来考慮。在 $0\leqslant s\leqslant t\leqslant 2\pi$ 上 $e^{A(t-s)}f(s)$ 的分量的絕对值 $<a_1M$. 所以 $\int_0^t e^{A(t-s)}f(s)ds$ 以及 $\int_0^{2\pi} e^{A(2\pi-s)}f(s)ds$ 的分量的絕对值 $<a_2M$. 从而由(46.10) $|c_i|<a_3M$. 并且在 $0\leqslant t\leqslant 2\pi$ 上 $|\bar{x}_s^{(i)}(t)|<a_4$. 这里 a_1,a_2,a_3,a_4 都是与 f 无关的常数。于是証明了 $3°$ 是成立的。 証毕

例2 $\dfrac{dx_1}{dt}=-kx_2+f_1(t)$, $\quad \dfrac{dx_2}{dt}=kx_1+f_2(t)$.

設 $f_1(t)$, $f_2(t)$ 是周期为 2π 的連續函数。

$A=\begin{pmatrix}0 & -k\\ k & 0\end{pmatrix}$ 的特征値是 $\pm ik$. 所以，如果 k 不是整数，上面的方程只

有一个周期为 2π 的解。k 是整数时，$\Psi(t)=\begin{pmatrix}\cos kt & \sin kt\\ \sin kt & -\cos kt\end{pmatrix}$。此时(46.7)就是

$$\int_0^{2\pi}(f_1(t)\cos kt+f_2(t)\sin kt)dt=0,$$

$$\int_0^{2\pi}(f_1(t)\sin kt-f_2(t)\cos kt)dt=0.$$

如果将 $f_1(t)$，$f_2(t)$ 写为

$$f_1(t)=\frac{a_0}{2}+\sum(a_n\cos nt+b_n\sin nt),$$

$$f_2(t)=\frac{c_0}{2}+\sum(c_n\cos nt+d_n\sin nt),$$

上一条件就是 $a_k=-d_k$，$b_k=c_k$。

k 是整数而使上一条件满足时，任意的解就具有周期 2π。在此情况下(46.11)的 $L(t,f)$ 就是下面的形式：

$$L_1(t,f)=\int_0^t(f_1(s)\cos k(t-s)-f_2(s)\sin k(t-s))ds,$$

$$L_2(t,f)=\int_0^t(f_1(s)\sin k(t-s)+f_2(s)\cos k(t-s))ds.$$

§ 47 非綫性方程(I)

对方程

$$\frac{dx}{dt}=Ax+f(t)+\mu F(t,x,\mu),\tag{47.1}$$

假設

1° $f_s(t)$ 是以 2π 为周期的連續函数。

2° $F_s(t,x,\mu)$ 定义在 $0\leqslant t<\infty$，$|\mu|<\mu_0$，$x\in B$(B 是 n 維空間的某一个域)，而且是有界連續的，关于 t 具有周期 2π，它的关于 $x_1, x_2, \cdots, x_n, \mu$ 的直到 k 阶的偏导数是有界連續的。

在本节中假定 A 不具有 $\sqrt{-1}$ 的整数倍的特征值。此时，由§46定理1，$\frac{dx}{dt}=Ax+f$ 只有唯一的一个以 2π 为周期的解，設它是 $p(t)$。又假定 $p(t)$ 含于2°的域 B 内，今欲求在(47.1)的周期为

2π 的解中当 $\mu=0$ 时就是 $p(t)$ 的那一个解。

将 (47.1) 的在 $t=0$ 时为 $p(0)+\beta$ 的解表示为 $x(t, \beta, \mu)$。[当 μ 充分小时，若把 β 取得充分小，则在 $0\leqslant t\leqslant T$（設 T 比 2π 大）上存在有属于域 B 的 $x(t, \beta, \mu)$。]❶問題是要决定滿足

$$x(2\pi, \beta, \mu)=x(0, \beta, \mu), \quad \beta(0)=0 \qquad (47.2)$$

的 $\beta=\beta(\mu)$。

$x(t, \beta, \mu)$ 滿足如下的积分方程：

$$x(t, \beta, \mu)=e^{At}(p(0)+\beta)+\int_0^t e^{A(t-s)}f(s)ds$$
$$+\mu\int_0^t e^{A(t-s)}F(s, x(s, \beta, \mu), \mu)ds❷.$$

应用 $p(t)=e^{At}p(0)+\int_0^t e^{A(t-s)}f(s)ds$，可以把(47.2)的第一个条件写成如下的形式：

$$(e^{2\pi A}-E)\beta+\mu\int_0^{2\pi} e^{A(2\pi-s)}F(s, x(s, \beta, \mu), \mu)ds=0. \quad (47.3)$$

此式在 $\beta=0$, $\mu=0$ 成立。

由假定，$\det(e^{2\pi A}-E)\neq 0$，由隐函数存在定理，存在着对于充分小的 μ (47.3) 成立而且 $\beta(0)=0$，以及关于 μ 連續的 $\beta=\beta(\mu)$。

由以上所論，可得到如下的定理：

定理 4 設在方程(47.1)中，A 不具有 $\sqrt{-1}$ 的整数倍的特征值，并且 f, F 滿足上述条件 1°, 2°，以及在 (47.1) 中取 $\mu=0$ 的綫性方程的周期为 2π 的解 $p(t)$ 含于区域 B 内。此时，对于充分小的 μ，(47.1) 就有唯一的一个关于 μ 是連續的，而且使得

---

❶ 此处 $x(t, \beta, \mu)$ 是存在的，且由 2° 可知它具有关于 $x_1, \cdots, x_n, \mu$ 直到 k 阶的連續偏导数。可参考第 2 章 §19 定理 7 以及 §20 定理 8 注意。——譯者注

❷ 这是由于将 $x(t, \beta, \mu)$ 代入 $F(t, x, \mu)$ 中，并且将 μ 固定，于是 (47.1) 成为 (46.1) 因而得依 (46.2) 的緣故。——譯者注

$x(t, 0)=p(t)$的周期为 2π 的解 $x(t, \mu)$。

例 (1) $\frac{d^2x}{dt^2}+k^2x=f(t)+\mu F\left(x, \frac{dx}{dt}\right)$, k 不是整数。

(2) $\frac{d^2x}{dt^2}+c\frac{dx}{dt}+k^2x=f(t)+\mu F\left(x, \frac{dx}{dt}\right)$, $c\neq 0$.

此处假設 $f(t)$ 是周期为 2π 的連續函数，$F(x, y)$ 是 x, y 的多項式。

上述任一情况在設 $\frac{dx}{dt}=y$ 而化成为方程組的形式后，矩陣 A 的特征値都不是 $\sqrt{-1}$ 的整数倍，所以可以应用上述定理。(1)，(2) 对于充分小的 μ 都具有周期为 2π 的解 $x(t, \mu)$，它使得 $x(t, 0)$ 与綫性方程(取 $\mu=0$ 的)唯一的周期解 $p(t)$ 一致。

§48 非綫性方程(II)

前节对方程(47.1)已作了考察，在本节中設 A 具有 $\sqrt{-1}$ 的整数倍的特征値，再作一次探討。

如同在§46中确定 $\varphi^{(1)}, \cdots, \varphi^{(m)}; \psi^{(1)}, \cdots, \psi^{(m)}$，并設条件(46.7)恒被滿足。此时在(47.1)中命 $\mu=0$ 而得到的方程

$$\frac{dx}{dt}=Ax+f \tag{48.1}$$

具有周期为 2π 的解。設解的一个为 $x^*(t)$，則(48.1)的任意的周期为 2π 的解可写为 $c_1\varphi^{(1)}+\cdots+c_m\varphi^{(m)}+x^*(t)$ ❶.

在(47.1)的周期为 2π 的解 $x(t, \mu)$ 中，当 $\mu=0$ 时它成为形如

$$p(t)\equiv c_1^*\varphi^{(1)}+\cdots+c_m^*\varphi^{(m)}+x^*(t)=\Phi(t)c^*+x^*(t) \tag{48.2}$$

的解假設已經存在。使得 $x(0, \mu)=p(0)+\beta$ 成立的 $x(t, \mu)$ 就可以写成 $x(t, \beta, \mu)$.

决定 $x(t, \beta, \mu)$ 的 β 使其具有周期性。为此目的的(充要)条件仍然是(47.3)。但是在这一情况下 $\det(e^{2\pi A}-E)=0$ 成立。

$e^{2\pi A}-E$ 的秩是 $n-m$。今設这一矩陣左上角的 $(n-m)$ 阶的

---

❶ 参照第207頁注❷。——譯者注

子行列式不等于零：

$$e^{2\pi A}-E=\begin{pmatrix} R_1 & R_2 \\ R_3 & R_4 \end{pmatrix},\ R_1 \text{ 就是}(n-m)\text{阶矩陣而且}$$

$$\det R_1 \neq 0. \tag{48.3}$$

此时設以 $\varphi^{(i)}$ 为第 i 列的 (n, m) 矩陣 $\Phi(t)=(\varphi^{(1)}(t)\cdots\varphi^{(m)}(t))$ 的下 m 个行所成 m 阶矩陣为 $\Phi_{(2)}(t)$，則

$$\det\Phi_{(2)}(0)\neq 0. \tag{48.4}$$

[假定 $\det\Phi_{(2)}(0)=0$，則存在有使得 $\Phi_{(2)}(0)c^0=0$ 及 $c^0\neq 0$ 的 m 維向量 c^0。由于 $\bar{x}(t)\equiv\Phi(t)c^0$ 是 $\frac{dx}{dt}=Ax$ 的解，所以 $\bar{x}(t)=e^{At}\bar{x}(0)$。而且它具有周期 2π，所以 $(e^{2\pi A}-E)\bar{x}(0)=0$。今設

$$\Phi(t)=\begin{pmatrix}\Phi_{(1)}(t)\\ \Phi_{(2)}(t)\end{pmatrix},\quad \text{則}\begin{pmatrix} R_1 & R_2 \\ R_3 & R_4 \end{pmatrix}\begin{pmatrix}\Phi_{(1)}(0)c^0\\ 0\end{pmatrix}=0.$$

所以，由 $\det R_1\neq 0$ 就有 $\Phi_{(1)}(0)c^0=0$ 而且 $\bar{x}(0)=0$❶。从而 $\bar{x}(t)=0$❷，但是这是与 $c^0\neq 0$ 矛盾的。]

其次，我們来求滿足 (47.3) 而且使得 $\beta(0)=0$ 的 $\beta=\beta(\mu)$。設由 β 的前 $(n-m)$ 个分量所成的 $(n-m)$ 維向量为 $\beta_{(1)}$，其余 m 个分量所成的 m 維向量为 $\beta_{(2)}$。此时 (47.3) 的前 $(n-m)$ 个式就可以写为

$$R_1\beta_{(1)}+R_2\beta_{(2)}+\mu\gamma_{(1)}(\beta, \mu)=0. \tag{48.5}$$

由于 $\det R_1\neq 0$，从上一方程可將 $\beta_{(1)}$ 解出为

$$\beta_{(1)}=\beta_{(1)}(\beta_{(2)}, \mu), \quad \beta_{(1)}(0, 0)=0. \tag{48.6}$$

这样表出之后，$\beta_{(1)}$ 的分量关于 $\beta_{n-m+1}, \cdots, \beta_n, \mu$ 是可 k 阶微分的。

---

❶ 因 $\bar{x}(t)=\Phi(t)c^0$，而 $\Phi(t)=\begin{pmatrix}\Phi_{(1)}(t)\\ \Phi_{(2)}(t)\end{pmatrix}$，故 $\bar{x}(t)=\begin{pmatrix}\Phi_{(1)}(t)c^0\\ \Phi_{(2)}(t)c^0\end{pmatrix}$，因此当 $t=0$ 时，$\bar{x}(0)=\begin{pmatrix}\Phi_{(1)}(0)c^0\\ \Phi_{(2)}(0)c^0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\ 0\end{pmatrix}$，即 $\bar{x}(0)=0$。——譯者注

❷ 因 $\bar{x}(t)=e^{At}\bar{x}(0)$。——譯者注

如果以 $\Psi'(2\pi)$ 左乘(47.3)，由(46.6)就有

$$\mu\int_0^{2\pi}\Psi'(s)F(s,\ x(s,\ \beta,\ \mu),\ \mu)ds=0❶. \qquad (48.7)$$

可使这一式代替(47.3)的最后的 m 个式子❷。

---

❶ 因 $\Psi'(2\pi)(e^{2\pi A}-E)=\Psi'(2\pi)e^{2\pi A}-\Psi'(2\pi)=\Psi'(0)e^{A0}-\Psi'(2\pi)=\Psi'(0)E-\Psi'(2\pi)=0$。——譯者注

❷ 設

$$\Psi'(t)=\begin{pmatrix}\psi_1^{(1)}(t) & \cdots & \psi_n^{(1)}(t)\\ \cdots\cdots & & \cdots\cdots\\ \psi_1^{(m)}(t) & \cdots & \psi_n^{(m)}(t)\end{pmatrix}=(\Psi'_{(1)}(t),\ \Psi'_{(2)}(t)),$$

此处 $\Psi'_{(1)}(t)$ 为 $(m,\ n-m)$ 矩陣，$\Psi'_{(2)}(t)$ 为 $(m,\ m)$ 矩陣。則 $|\Psi'_{(2)}(0)|=|\Psi'_{(2)}(2\pi)|\neq 0$。

由于 $\Psi(t)=\begin{pmatrix}\Psi_{(1)}(t)\\ \Psi_{(2)}(t)\end{pmatrix}$，故能証 $|\Psi_{(2)}(0)|=|\Psi_{(2)}(2\pi)|\neq 0$ 卽可。

[証] (归謬法)令 $|\Psi_{(2)}(0)|=0$，則 $\exists$ m 阶向量 $c^0\neq 0$，而使 $\Psi_{(2)}(0)c^0=0$. 作 $\bar{x}(t)=\Psi(t)c^0$，則 $\bar{x}(t)$ 为 $\frac{dy}{dt}=-A'y$ 的解，从而 $\bar{x}(t)=e^{-A't}\bar{x}(0)$. 并且由于 $\bar{x}(t)$ 具有周期为 2π 的緣故，$(e^{-2\pi A'}-E)\bar{x}(0)=0$. 由此得出 $(e^{2\pi A'}-E)\bar{x}(0)=0$. 但

$$e^{2\pi A'}-E=(e^{2\pi A}-E)'=\begin{pmatrix}R_1 & R_2\\ R_3 & R_4\end{pmatrix}'=\begin{pmatrix}R_1' & R_2'\\ R_3' & R_4'\end{pmatrix}.$$

而 $|R_1|\neq 0$，故 $|R_1'|\neq 0$. 因此

$$\begin{pmatrix}R_1' & R_2'\\ R_3' & R_4'\end{pmatrix}\Psi(0)c^0=\begin{pmatrix}R_1' & R_2'\\ R_3' & R_4'\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\Psi_1(0)\\ \Psi_2(0)\end{pmatrix}c^0=\begin{pmatrix}R_1' & R_2'\\ R_3' & R_4'\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\Psi_1(0)c^0\\ \Psi_2(0)c^0\end{pmatrix}$$

$$=\begin{pmatrix}R_1' & R_2'\\ R_3' & R_4'\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\Psi_1(0)c^0\\ 0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}R_1'\Psi_1(0)c^0\\ R_3'\Psi_2(0)c^0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\ 0\end{pmatrix},$$

因 $|R_1'|\neq 0$，故必 $\Psi_1(0)c^0=0$，从而

$$\bar{x}(0)=\Psi(0)c^0=\begin{pmatrix}\Psi_{(1)}(0)\\ \Psi_{(2)}(0)\end{pmatrix}c^0=\begin{pmatrix}\Psi_{(1)}(0)c^0\\ \Psi_{(2)}(0)c^0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\ 0\end{pmatrix},$$

随之，$\bar{x}(t)=e^{-A't}\bar{x}(0)=0$. 另一方面，$\bar{x}(t)=\Psi(t)c^0$，而 $c^0\neq 0$，是以两者矛盾。因

$$\Psi'(2\pi)\begin{pmatrix}R_1\beta_1+R_2\beta_2+\mu\gamma_1\\ R_3\beta_1+R_4\beta_2+\mu\gamma_2\end{pmatrix}=(\Psi_1'(2\pi)\ \Psi_2'(2\pi))\begin{pmatrix}R_1\beta_1+R_2\beta_2+\mu\gamma_1\\ R_3\beta_1+R_4\beta_2+\mu\gamma_2\end{pmatrix}$$

$$=\Psi_1'(2\pi)(R_1\beta_1+R_2\beta_2+\mu\gamma_1)+\Psi_2'(2\pi)(R_3\beta_1+R_4\beta_2+\mu\gamma_2)$$

$$=\mu\int_0^{2\pi}\Psi'(s)F(s,\ x(s,\ \beta,\ \mu),\ \mu)ds=\mu\int_0^{2\pi}\Psi'(s)F(s,\ \bar{x}(s,\ \beta_2,\ \mu),\ \mu)ds=0,\ (1)$$

故当 $\beta_2=\beta_2(\mu)$ 使(48.8)滿足，則此 β_2 及 $\beta_1=\beta_1(\beta_2(\mu),\ \mu)$ 使(1)滿足，而 $\beta_1=\beta_1(\beta_2(\mu),\ \mu)$ 更使 $R_1\beta_1+R_2\beta_2+\mu\gamma_1=0$，于是此 β_2 及此 β_1 使 $\Psi'_{(2)}(2\pi)(R_3\beta_1+R_4\beta_2+\mu\gamma_2)=0$，但 $|\Psi'_{(2)}(2\pi)|=|\Psi'_{(2)}(0)|\neq 0$，故此 β_1, β_2 使 $R_3\beta_1+R_4\beta_2+\mu\gamma_2=0$. 卽此 β_1, β_2 使(47.3)后 m 个方程成立。又知此 β_1, β_2 使 $R_1\beta_1+R_2\beta_2+\mu\gamma_1=0$，卽使(47.3)前 $n-m$ 个方程成立，于是此 β_1, β_2 卽 β 使(47.3)成立。——譯者注

命 $x(s, \beta, \mu) \equiv x(s, \beta_{(1)}, \beta_{(2)}, \mu)$，以 (48.6) 的 $\beta_{(1)}(\beta_{(2)}, \mu)$ 代替这一表达式中的 $\beta_{(1)}$，所得到的結果以 $\bar{x}(s, \beta_{(2)}, \mu)$ 表之。

以这一 $\bar{x}$ 代替(48.7)的 x，并以 μ 除 (48.7)，就得到

$$Q(\beta_{(2)}, \mu) \equiv \int_0^{2\pi} \Psi'(s) F(s, \bar{x}(s, \beta_{(2)}, \mu), \mu) ds = 0. \quad (48.8)$$

于是問題就归結到决定一个使 (48.8) 与 $\beta_{(2)}(0)=0$ 得以滿足的 $\beta_{(2)}=\beta_{(2)}(\mu)$ 了。

若

$$Q(0, 0) = 0 \quad (48.9)$$

而且关于 $\beta_{(2)}$ 的 Q 的函数行列式在 $\beta_{(2)}=0$，$\mu=0$ 处不为零，即

$$\det\left(\frac{\partial Q(\beta_{(2)}, \mu)}{\partial \beta_{(2)}}\right)_{\beta_{(2)}=0, \mu=0} \neq 0, \quad (48.10)$$

則由隐函数存在定理，对于充分小的 μ，由(48.8)可以解出 $\beta_{(2)}=\beta_{(2)}(\mu)$，$\beta_{(2)}(0)=0$。于是由(48.6)就决定了 $\beta_{(1)}(\mu)=\beta_{(1)}(\beta_{(2)}(\mu), \mu)$，并且决定了滿足(47.3)同时使 $\beta(0)=0$ 的 $\beta=\beta(\mu)$，而且也得到(47.1)的周期为 2π 的解 $x(t, \beta(\mu), \mu)$。

于此更詳細地考察(48.9)及(48.10)。

因为 $\bar{x}(t, \beta_{(2)}, 0)$ 是 $\frac{dx}{dt}=Ax+f$ 的周期为 2π 的解，故可以把它写为

$$\bar{x}(t, \beta_{(2)}, 0) = c_1\varphi^{(1)}(t) + \cdots + c_m\varphi^{(m)}(t) + x^*(t), \quad (48.11)$$

此处 $c_1, \cdots, c_m$ 是常数，而且是 $\beta_{(2)}$ 的分量即 $\beta_{n-m+1}, \cdots, \beta_n$ 的函数。在(48.11)中命 $t=0$，并注意到(48.2)，就有

$$\beta_{(2)} = \Phi_{(2)}(0)(c-c^*) \text{ ❶}. \quad (48.12)$$

由于 $\det \Phi_{(2)}(0) \neq 0$，从这一关系可知 $c-c^*$ 与 $\beta_{(2)}$ 相互对应。由(48.8)及(48.12)就有

---

❶ 因 $\bar{x}(t, \beta_2, 0) \equiv x(t, \beta, 0)$，故 $\bar{x}(t, \beta_2, 0) = \Phi(t)c + x^*(t)$，从而特别地 $\bar{x}(0, \beta_2, 0) \equiv x(0, \beta, 0) = \Phi(0)c$。

再 $\bar{x}(0, \beta_2, 0) \equiv x(0, \beta, 0) = p(0) + \beta$，故依(48.2)，$\bar{x}(0, \beta_2, 0) = \Phi(0)c^* + \beta$。于是 $\Phi(0)c = \Phi(0)c^* + \beta$，从而 $\beta = \Phi(0)(c-c^*)$，随之，$\beta_2 = \Phi_2(0)(c-c^*)$。——譯者注

$$Q(\beta_{(2)}, 0) = \int_0^{2\pi} \Psi'(s) F(s, \bar{x}(s, \beta_{(2)}, 0), 0) ds = 0, \quad (48.13)$$

$$\det\left(\frac{\partial Q}{\partial \beta_{(2)}}\right)_{\mu=0} \det\left(\frac{\partial \beta_{(2)}}{\partial c}\right) = \det\left(\frac{\partial Q}{\partial c}\right)_{\mu=0}.$$

在 $\beta_{(2)}=0$ 处就有 $c=c^*$，而且 $\bar{x}(t, 0, 0)=p(t)$，所以

$$P(c^*) \equiv \int_0^{2\pi} \Psi'(s) F(s, p(s), 0) ds = 0. \quad (48.14)$$

还有，由于 $\det\left(\frac{\partial \beta_{(2)}}{\partial c}\right) = \det \Phi_{(2)}(0) \neq 0$，(48.10) 可写为

$$\det\left(\frac{\partial P(c^*)}{\partial c^*}\right) \neq 0. \quad (48.15)$$

綜括以上得到下一定理。

定理 5 設在方程 (47.1) 中，f, F 滿足 §47 开头处所假設的条件 1°, 2°，矩陣 $e^{2\pi A}-E$ 的秩是 $n-m$，而且 $\int_0^{2\pi} \Psi'(s) f(s) ds = 0$. 对于 m 維向量 c，命 $P(c) = \int_0^{2\pi} \Psi'(s) F(s, x^*+\Phi(s)c, 0) ds$. 并且設 $P(c^*)=0$ 及 $\det\left(\frac{\partial P(c^*)}{\partial c^*}\right) \neq 0$ 成立，而且 $p(t) \equiv x^*(t) + \Phi(t)c^*$ 含于区域 B 内。

此时 (47.1) 对于充分小的 μ，具有唯一的一个关于 μ 是連續的，而且使得 $x(t, 0)=p(t)$ 的周期为 2π 的解 $x(t, \mu)$.

由这一定理所保証其存在的 $x(t, \mu)$ 的求法将在以下两节中說明。在 §49 中，关于解析的情况，用展成冪級数的方式来闡述，在 §50 中，用逐次逼近法来闡述。

§49 决定周期解的方法(在解析的情况下)

設方程(47.1)右端的 $F(t, x, \mu)$ 是关于 $x_1, \cdots, x_n, \mu$ 的解析函数。假定 (48.14) 与 (48.15) 成立。前节已証明，(47.1) 对于充分小的 μ，具有唯一的一个在 $\mu=0$ 处与 $p(t)$ 一致而且关于 μ 是連續的周期为 2π 的解 $x(t, \mu)$. 在现在的情况下 $x(t, \mu)$ 关于 μ 是解析的。实际上，$x(t, \beta, \mu)$ 关于 $\beta_1, \cdots, \beta_n, \mu$ 是解析的，

(48.6) 的 $\beta_1, \cdots, \beta_{n-m}$ 关于 $\beta_{n-m+1}, \cdots, \beta_n, \mu$ 是解析的❶，$\beta_{n-m+1}(\mu), \cdots, \beta_n(\mu)$，由(48.10)，也是解析的。因而 $x(t, \mu)$ 关于 μ 是解析的。

所以問題就是求如下形式的 $x(t, \mu)$ 了，

$$x(t, \mu) = p(t) + \mu p^{(1)}(t) + \mu^2 p^{(2)}(t) + \cdots, \tag{49.1}$$

$$p^{(i)}(t+2\pi) = p^{(i)}(t).$$

把(49.1)代入(47.1)而使 μ 的系数对应相等

$$\frac{dp^{(1)}}{dt} = Ap^{(1)} + F(t, p(t), 0), \tag{49.2}$$

$$\frac{dp^{(2)}}{dt} = Ap^{(2)} + \frac{\partial F}{\partial x}(t, p(t), 0)p^{(1)} + F_\mu(t, p(t), 0), \tag{49.3}$$

一般地有

$$\frac{dp^{(k)}}{dt} = Ap^{(k)} + \frac{\partial F}{\partial x}(t, p, 0)p^{(k-1)} + F^{(k-2)}, \tag{49.4}$$

此处 $F^{(k-2)}$ 含有 $p, p^{(1)}, \cdots, p^{(k-2)}$，而且作为 t 的函数具有周期 2π❷。

---

❶ 依关于参数之解析性定理以及关于解析組的隐函数存在定理。前者可参看第2章 §23 定理 15；后者可参看 А. И. Маркушевич 解析函数論第4章 §5 的隐函数存在定理。此处 x, μ 虽然为实数，但也可引用該处定理，因为复数情况包含着实数情况。——譯者注

❷ 因将(49.1)代入 $F(t, x, \mu)$ 内而得关于 μ 的函数 $\bar{F}(\mu)$，此时将 t 視为常数，即

$$F(t, x, \mu) = F(t, x(t, \mu), \mu) = \bar{F}(\mu),$$

依假設可推知 $\bar{F}(\mu)$ 是关于 μ 的解析函数，所以可展成 Taylor 級数，即

$$F(t, x, \mu) = F(t, x(t, \mu), \mu) = \bar{F}(\mu) = \bar{F}_0 + \bar{F}_0'\mu + \frac{\bar{F}_0''}{2!}\mu^2 + \cdots,$$

而 $\bar{F}_0 = F(t, p, 0)$，$\bar{F}_0' = F_x(t, p, 0)p^{(1)} + F_\mu(t, p, 0)$，

$$\frac{\bar{F}_0''}{2!} = F_x(t, p, 0)p^{(2)} + \frac{1}{2!}\Big[\frac{\partial^2 F(t, p, 0)}{\partial x^2}(p^{(1)})^2 + \Big(\frac{\partial F_x(t, p, 0)}{\partial \mu} + \frac{\partial F_\mu(t, p, 0)}{\partial x}\Big)p^{(1)} + \frac{\partial F_\mu}{\partial \mu}\Big].$$

于是

$$\frac{dp}{dt} + \mu\frac{dp^{(1)}}{dt} + \mu^2\frac{dp^{(2)}}{dt} + \mu^3\frac{dp^{(3)}}{dt} + \cdots = Ap + \mu Ap^{(1)} + \mu^2 Ap^{(2)} + \mu^3 Ap^{(3)} + \cdots + f + \mu\bar{F}_0 + \mu^2\bar{F}_0' + \mu^3\frac{\bar{F}_0''}{2!} + \cdots.$$

因此，有(49.2)，(49.3)，以及 $\frac{dp^{(3)}}{dt} = Ap^{(3)} + F_x(t, p, 0)p^{(2)} + F^{(1)}$，此处

$$F^{(1)} = \frac{1}{2!}\Big[\frac{\partial^2 F(t, p, 0)}{\partial x^2}(p^{(1)})^2 + \Big(\frac{\partial F_x(t, p, 0)}{\partial \mu} + \frac{\partial F_\mu(t, p, 0)}{\partial x}\Big)p^{(1)} + \frac{\partial F_\mu}{\partial \mu}\Big].$$

——譯者注

然而(49.2)具有周期为 2π 的解的充分与必要条件就是

$$\int_0^{2\pi} \Psi'(s) F(s, p(s), 0) ds = 0.$$

这就是(48.14)。从而(49.2)应当具有无数个周期为 2π 的解。如果 $p^{(1)}$ 是它的一个解，则(49.2)的任何一个周期为 2π 的解可以表为 $\bar{p}^{(1)}+\Phi c^{(1)}$。$c^{(1)}$ 是这样地确定的：足以使得关于 $p^{(2)}$ 的方程具有周期为 2π 的解。即是选出 $c^{(1)}$ 使得(49.3)具有周期为 2π 的解的充要条件：

$$\int_0^{2\pi} \Psi'(s) \frac{\partial F}{\partial x}(s, p(s), 0)(\bar{p}^{(1)}(s)+\Phi(s)c^{(1)})ds + \int_0^{2\pi} \Psi'(s) F_\mu(s, p(s), 0) ds = 0 \tag{49.5}$$

得以满足❶。实际上，这样的选法是可能的，因为如果注意到(48.2)，由(48.14)

$$\frac{\partial P(c^*)}{\partial c^*} = \int_0^{2\pi} \Psi'(s) \frac{\partial F}{\partial x}(s, p(s), 0)\Phi(s) ds \tag{49.6}$$

成立。另一方面，也是因为由(48.15)逆矩陣 $\left(\frac{\partial P(c^*)}{\partial c^*}\right)^{-1}$ 存在的緣故❷。于是确定了具有周期为 2π 的 $p^{(1)}(t)$。从上式可以直接知道所得結果与 $\bar{p}^{(1)}(t)$ 的选取无关❸。

---

❶ 此处文意是这样的：依假設(48.14)成立，而(48.14)恰是(49.2)具有周期为 2π 解的充要条件，于是(49.2)有周期为 2π 的解，且有无穷多个。今任取一个比如 $\bar{p}^{(1)}$，待确定的 $p^{(1)}$ 是(49.2)的一个周期为 2π 的解，于是可令 $p^{(1)}=\bar{p}^{(1)}+\Phi c^{(1)}$。而 $p^{(1)}$ 又出现于(49.3)中，随之出现于(49.3)具有周期为 2π 的解的充要条件(49.5)，即 $c^{(1)}$ 須使(49.5)成立。——譯者注

❷ (49.6)右端的行列式恰是关于 $c^{(1)}$ 的方程(49.5)的系数行列式，而它依(48.15)成立的这一假設是异于0的。——譯者注

❸ 因为如另設所取(49.2)的周期为 2π 的解为 $\bar{q}^{(1)}$，于是待定的 $p^{(1)}=\bar{q}^{(1)}+\Phi d^{(1)}$，和上述关于 $\bar{p}^{(1)}$ 所論一样而有

$$\int_0^{2\pi} \Psi' F_x(\bar{q}^{(1)}+\Phi d^{(1)}) ds + \int_0^{2\pi} \Psi' F_\mu ds = 0.$$

但 $\bar{q}^{(1)}=\bar{p}^{(1)}+\Phi\bar{c}^{(1)}$，于是

$$\int_0^{2\pi} \Psi' F_x(\bar{p}^{(1)}+\Phi(\bar{c}^{(1)}+d^{(1)})) ds + \int_0^{2\pi} \Psi' F_\mu ds = 0.$$

由此可知 $\bar{c}^{(1)}+d^{(1)}$ 为(49.5)的一个解，而(49.5)解是唯一的，故

$$\bar{c}^{(1)}+d^{(1)}=c^{(1)}.$$

因此，待确定的

$$p^{(1)}=\bar{q}^{(1)}+\Phi d^{(1)}=\bar{p}^{(1)}+\Phi\bar{c}^{(1)}+\Phi(c^{(1)}-\bar{c}^{(1)})=\bar{p}^{(1)}+\Phi c^{(1)}.$$——譯者注

同样地，假設具有周期为 2π 的 $p^{(1)}(t)$，…，$p^{(k-2)}(t)$ 都已确定。于是确定 $p^{(k-1)}(t)$ 的方程应有无数个以 2π 为周期的解，可設 $\bar{p}^{(k-1)}(t)$ 为这些解中的一个。在(49.4)的右端 $p^{(k-1)}$ 处置以 $\bar{p}^{(k-1)}+\Phi c^{(k-1)}$ 所得到的方程具有周期为 2π 的解的充分必要条件，就是在(49.5)中把 $\bar{p}^{(1)}$，$c^{(1)}$，F_μ 换为 $\bar{p}^{(k-1)}$，$c^{(k-1)}$，$F^{(k-2)}$ 所得到的結果。因而确定滿足这一条件的 $c^{(k-1)}$ 的过程与 $c^{(1)}$ 的情况完全相同。于是可以确定以 2π 为周期的 $p^{(k-1)}(t)$。

綜括以上的論述得到下一定理。

定理 6 对于方程(47.1)，假設定理5中所述假定得到滿足，并且在其內的 $F(t, x, \mu)$ 关于 $x_1, x_2, \cdots, x_n, \mu$ 是解析的。此时由定理5所証明其存在的解 $x(t, \mu)$，当 μ 充分小时是关于 μ 解析的。求这一解时，以形如(49.1)的右端的級数代入(47.1)內而比較 μ^k 的系数就得到(49.2)，(49.3)，(49.4)，以这些結果来确定具有周期为 2π 的 $p^{(1)}(t)$，$p^{(2)}(t)$，…，$p^{(k)}(t)$，…．$p^{(1)}(t)$，$p^{(2)}(t)$，…都是唯一确定的。由它們作成的冪級数 $\sum_{n=0}^{\infty} p^{(n)}(t)\mu^n$ 对于充分小的 μ 是收斂的，并且給出了(47.1)的周期为 2π 的解。

注意 实际上，在求周期解时用不着事先驗証条件 $P(c^*)=0$。如果以 $p(t)+p^{(1)}(t)\mu+p^{(2)}(t)\mu^2+\cdots$ 代入方程而确定出使得 $p^{(1)}(t)$ 具有周期为 2π 的 $p(t)$，則 $P(c^*)=0$ 就已經滿足了。如果 $\det\left(\frac{\partial P(c^*)}{\partial c^*}\right)\neq 0$，則可依次确定 $p^{(1)}(t)$，$p^{(2)}(t)$，…，但是，使得 $p^{(2)}(t)$ 具有周期为 2π 而把 $p^{(1)}(t)$ 确定却不限于 $\det\left(\frac{\partial P(c^*)}{\partial c^*}\right)\neq 0$。把 c^* 确定之后有必要驗証此条件。

例 試求 $\frac{d^2x}{dt^2}+x+\mu\left((a+d\cos 2t)x+bx^3+c\frac{dx}{dt}\right)=0$ 的周期为 2π 的解。

在这一情况下 $A=\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$，特征值是 $\pm i$，可以应用定理6。命

$$x=p_0(t)+p_1(t)\mu+p_2(t)\mu^2+\cdots$$

并代入方程，使 $\mu^k(k=0, 1, 2, \cdots)$ 的系数等于零，就有

$$\frac{d^2p_0}{dt^2}+p_0=0,$$

$$\frac{d^2p_1}{dt^2}+p_1=-\left((a+d\cos 2t)p_0+bp_0^3+c\frac{dp_0}{dt}\right),$$

$$\frac{d^2p_2}{dt^2}+p_2=-\left((a+d\cos 2t)p_1+3bp_0^2p_1+c\frac{dp_1}{dt}\right),$$

……………………………………………………

由这里的第一式，$p_0(t)=c_1\cos t+c_2\sin t$.

为了使得 $p_1(t)$ 以 2π 为周期，把 $p_0(t)=c_1\cos t+c_2\sin t$ 代入上面第一式的右端而化成 Fourier 級数后，$\cos t$, $\sin t$ 的系数就不能不是零。这一条件就是

$$\left.\begin{aligned}&cc_2+(a+(d/2)+(3/4)(c_1^2+c_2^2))c_1=0,\\&cc_1-(a-(d/2)+(3/4)(c_1^2+c_2^2))c_2=0.\end{aligned}\right\}\qquad(*)$$

这就是确定 c_1, c_2 的式子。对于这样决定的 $p_0(t)$，上面第一式的右端就化成 $\alpha\cos 3t+\beta\sin 3t$ 的形式。从而 $p_1(t)=c_1^{(1)}\cos t+c_2^{(1)}\sin t-(\alpha/8)\cos 3t-(\beta/8)$. 把 $\sin 3t$ 代入上面第二式的右端而化成 Fourier 級数后，$\cos t$, $\sin t$ 的系数就化为零，这样来定出 $c_1^{(1)}$, $c_2^{(1)}$. 以下同样地进行，可确定 $p_2(t)$, $p_3(t)$, ….

$(*)$ 式就是 $P(c^*)=0$. 并且直接由$(*)$求 $\det\left(\frac{\partial P(c^*)}{\partial c^*}\right)\neq 0$ 比由(49.6)計算要快些。这就是說对于满足$(*)$的 c_1, c_2

$$\det\begin{pmatrix}a+(d/2)+(3/4)c_1^2+(9/4)c_2^2 & c+(3/2)c_1c_2\\ c-(3/2)c_1c_2 & -a+(d/2)-(3/4)c_1^2-(9/4)c_2^2\end{pmatrix}\neq 0$$

就表明了 $\det\left(\frac{\partial P(c^*)}{\partial c^*}\right)\neq 0$.

§ 50 决定周期解的方法(逐次逼近法)

在 § 48 中已經証明了 (47.1) 的周期为 2π 的解的存在，現在介紹用逐次逼近法求这一解的方法。

如 § 48 所述，設 $x^*(t)$是(48.1)的一个周期为 2π 的解，而且 $p(t)=x^*(t)+\Phi(t)c^*$，其中 c^* 满足 (48.14)，且(48.15)是成立的。更設 $p(t)$在区域 B 内。此外还假設(46.7)成立。

現在以

$$x^{(1)}(t)=x^*+\Phi(t)c^{(1)}\qquad(50.1)$$

为第一近似。此处 $c^{(1)}=c^{(1)}(\mu)$ 是使之满足

$$\int_0^{2\pi}\Psi'(t)F(t,\ x^{(1)}(t),\ \mu)\,dt=0, \tag{50.2}$$

以及 $c^{(1)}(0)=c^*$ 而确定的。实际上，由条件(48.14)及(48.15)这是可能的。

其次，应用§46的 $L(t,f)$，以下式确定第二近似：

$$x^{(2)}(t)=x^*+\Phi(t)c^{(2)}+\mu L(t,\ F^{(1)}). \tag{50.3}$$

此处 $F^{(1)}=F(t,\ x^{(1)}(t),\ \mu)$，而且 $c^{(2)}$ 满足

$$\int_0^{2\pi}\Psi'(t)F(t,\ x^{(2)}(t),\ \mu)\,dt=0, \tag{50.4}$$

以及 $c^{(2)}(0)=c^*$。与 $c^{(1)}$ 的情况相同，这是可能的。

一般地説，第 k 近似 $x^{(k)}(t)$ 是如下确定的：

$$x^{(k)}=x^*+\Phi(t)c^{(k)}+\mu L(t,\ F^{(k-1)}), \tag{50.5}$$
$$F^{(i)}=F(t,\ x^{(i)}(t),\ \mu).$$

此处 $c^{(k)}=c^{(k)}(\mu)$，使 $c^{(k)}(0)=c^*$ 及

$$\int_0^{2\pi}\Psi'(t)F(t,\ x^{(k)}(t),\ \mu)\,dt=0 \tag{50.6}$$

成立。于此我們使用下一記法：

$$\xi^{(k)}(t,\ c,\ \mu)\equiv x^*+\Phi(t)c+\mu L(t,\ F^{(k-1)}), \tag{50.7}$$

$$P^{(k)}(c,\ \mu)\equiv\int_0^{2\pi}\Psi'(t)F(t,\ \xi^{(k)}(t),\ \mu)\,dt. \tag{50.8}$$

此时(50.6)可以写成下列形式：

$$P^{(k)}(c^{(k)},\ \mu)=0. \tag{50.9}$$

但这样确定的 $x^{(k)}=x^{(k)}(t,\ \mu)$，对于充分小的 μ，一致收斂到(47.1)的周期为 2π 的解 $x(t,\ \mu)$。以下将証明这件事。

（第一段） 我們要証明这一事实：对于充分小的 μ，$x^{(k)}$ 在区域 B 内。为此，能証下一命題即可，就是：$x^{(1)},\ \cdots,\ x^{(k-1)}$ 含于 B 内则 $x^{(k)}$ 也含于 B 内。

首先,注意 $|F_s(t, x, \mu)|<M$ ❶,以及由 §46 定理 3 的 3° 所导出的下列关系式:

$$|L_s(t, F^{(k-1)})|<aM \text{❷}. \tag{50.10}$$

由于函数行列式 $\det\left(\frac{\partial P^{(k)}}{\partial c}\right)$ 在 $c=c^*$, $\mu=0$ 处不等于零,可以适当地选取与 k 无关的正数 α, h, η, 当

$$|c_i-c_i^*|\leqslant h \quad (i=1, \cdots, m), \tag{50.11}$$

$$\mu\leqslant\eta \tag{50.12}$$

时,$\xi^{(k)}\in B$ 而且有

$$\left|\det\left(\frac{\partial P^{(k)}}{\partial c}\right)\right|>\alpha \tag{50.13}$$

成立。

[由(50.10)可知 $\xi^{(k)}\in B$ 成立❸。再由

$$\frac{\partial P^{(k)}}{\partial c}(c, \mu)=\int_0^{2\pi}\Psi'(t)\frac{\partial F}{\partial x}(t, x^*+\Phi c+\mu L(t, F^{(k-1)}), \mu)\Phi(t)dt$$

可知(50.13)得以成立。]❹

---

❶ 見(47.1)的 $F(t, x, \mu)$ 所滿足的条件 2°: $F_s(t, x, \mu)$ 于 $0\leqslant t\leqslant\infty$, $|\mu|<\mu_0$, $x\in B$ 为有界連續,即 $|F_s(t, x, \mu)|<M$.——譯者注

❷ 因依归納假設, $x^{(k-1)}\in B$, 再依 $F(t, x, \mu)$ 所滿足的条件 2°, 可知

$$|F_s(t, x^{(k-1)}, \mu)|<M,$$

继而依 §46 定理 3 的 3°, $|L_s(t, F^{(k-1)})|<aM$.——譯者注

❸ 因 $\xi^{(k)}(t, c, \mu)-p(t)=\Phi(t)(c-c^*)+\mu L(t, F^{(k-1)})$, 故

$$\|\xi^{(k)}(t, c, \mu)-p(t)\|\leqslant\|\Phi(t)\|\|c-c^*\|+|\mu|naM,$$

再注意到 $p(t)\in B$, 而 B 为开集合的这件事就可确定所要的 h 与 η 了。——譯者注

❹ 因当 $c=c^*$, $\mu=0$ 时, $\frac{\partial P^{(k)}}{\partial c}=\int_0^{2\pi}\Psi'F_x(t, p, 0)\Phi dt=\frac{\partial P(c^*)}{\partial c^*}$, 而依假設 $\det\left(\frac{\partial P(c^*)}{\partial c^*}\right)\neq 0$, 故 $\left|\det\left(\frac{\partial P(c^*)}{\partial c^*}\right)\right|>0$, 以 $M>0$ 表之, 此 $M>0$ 显然与 k 无关, 今取 $\alpha=\frac{M}{2}$. 由于 $\left|\det\left(\int_0^{2\pi}\Psi'F_x(t, x, \mu)\Phi dt\right)\right|$ 于 $x=p$, $\mu=0$ 連續, 故可确定 $\bar{h}$, $\bar{\eta}$: 当 $|x_i-p_i|\leqslant\bar{h}$, $1\leqslant i\leqslant n$, $\mu\leqslant\bar{\eta}$, 则 $\left|\det\left(\int_0^{2\pi}\Psi'F_x\Phi dt\right)\right|>\alpha$.

但 $$|\xi_i^{(k)}-p_i|\leqslant k(|c_1-c_1^*|+\cdots+|c_m-c_m^*|)+\mu aM,$$

于是确定 h, η: 当 $|c_i-c_i^*|\leqslant h$, $1\leqslant i\leqslant m$, $\mu<\eta$ 时,则 $kmh+\eta aM<\bar{h}$ 及 $\mu\leqslant\bar{\eta}$.

由于 $\bar{h}$, $\bar{\eta}$ 与 k 无关,从而 h, η 与 k 无关。此 h, η 即合于所求。

欲使 $\xi^{(k)}\in B$, 及(50.13)同时成立, 只須分別取以上二个 h, 二个 η 中之最小者即可。——譯者注

其次，証明可选取一个与 k 无关的充分小的 η_1，当 $\mu\leqslant\eta_1$ 时就有

$$|c_i^{(k)}(\mu)-c_i^*|\leqslant h^{❶}\qquad (i=1,\cdots,m)。\tag{50.14}$$

由于 $c^{(k)}(0)=c^*$，所以(50.14)对于充分小的 μ 成立，从而可假定 μ 自 0 起逐漸增大而到达 μ^* 时才有 $|c_i^{(k)}(\mu^*)-c_i^*|=h$❷。今設只将 c 的第 i 个分量 c_i 以 μ 代换后所得的向量为 $\bar{c}$。則存在有使 $\left|\det\left(\frac{\partial P^{(k)}}{\partial \bar{c}}\right)\right|\leqslant\alpha_1$ 而且与 k 无关的 α_1。于是，如果选取 η_1 使得 $\eta_1<\alpha\alpha_1^{-1}h$，就有 $\mu^*>\eta_1$❸。

实际上，$c_i^{(k)}(\mu^*)-c_i^*=c_i^{(k)}(\mu^*)-c_i^{(k)}(0)=\mu^*\left(\frac{dc_i^{(k)}(\mu)}{d\mu}\right)_{\mu=\theta\mu^*}$，$0<\theta<1$。另一方面，由于 $\det\left(\frac{\partial P^{(k)}}{\partial \bar{c}^{(k)}}\right)=-\frac{dc_i^{(k)}(\mu)}{d\mu}\det\left(\frac{\partial P^{(k)}}{\partial c^{(k)}}\right)$❹，如果 $\mu^*\leqslant\eta_1$，就有 $|c_i^{(k)}(\mu^*)-c_i^*|\leqslant\mu^*\alpha^{-1}\alpha_1\leqslant\eta_1\alpha^{-1}\alpha_1<h$ 这样的不合理的結果。

所以当 $\mu\leqslant\eta_1$(η_1 与 k 无关)时，(50.14) 得以成立，从而就証明了 $x^{(k)}(t)\in B$。

(第二段) 取两个常数 a_k, b_k，使得

$$|L_s(t,F^{(k-1)})-L_s(t,F^{(k-2)})|<a_k,\quad |c_i^{(k)}-c_i^{(k-1)}|<b_k$$

成立。

$$\begin{aligned}|F_s^{(k)}-F_s^{(k-1)}|&\leqslant M_1\sum_{r=1}^{n}|x_r^{(k)}-x_r^{(k-1)}|\\&\leqslant M_1\sum_{r=1}^{n}\left|\sum_{i=1}^{m}(c_i^{(k)}-c_i^{(k-1)})\varphi_r^{(i)}+\mu(L_r(t,F^{(k-1)})-L_r(t,F^{(k-2)}))\right|\\&<nM_1(mM_2b_k+\mu a_k)。\end{aligned}$$

---

❶ 原书在 c_i^* 漏"*"号。——譯者注

❷ 由于 $c^{(k)}(0)=c^*$，故 $|c_i^{(k)}(0)-c_i^*|=0$；又由于 $|c_i^{(k)}(\mu)-c_i^*|$ 关于 μ 連續，是以如果有使 $|c_i^{(k)}(\mu)-c_i^*|=h$ 的 μ^*，则必 $\mu^*>0$，且更可要求 μ^* 满足：当 $0\leqslant\mu\leqslant\mu^*$ 时，$|c_i^{(k)}(\mu)-c_i^*|<h$。

原书在 c_i^* 上角漏"*"号。——譯者注

❸ 当然此处 η_1 更須 $<$(50.12)中的 η。——譯者注

❹ 此式中的 $\bar{c}^{(k)}$ 是将 $c^{(k)}$ 的第 i 个分量易为 μ 所得到的向量，原书將 $c^{(k)}$ 誤为 c，将 $\bar{c}^{(k)}$ 誤为 $\bar{c}$。又在等式右端漏一"－"号。——譯者注

此处 M_1, M_2 是常数。从而有

$$|L_s(t, F^{(k)}) - L_s(t, F^{(k-1)})| = |L_s(t, F^{(k)} - F^{(k-1)})|$$
$$< anM_1(mM_2b_k + \mu a_k)$$

所以就得

$$a_{k+1} = anM_1(mM_2b_k + \mu a_k). \tag{50.15}$$

再次,更考虑 $c_i^{(k+1)}(\mu) - c_i^{(k)}(\mu)$ 的估值。如果設 $0 \leqslant \lambda \leqslant \mu$, 命

$$\zeta^{(k)} = x^* + \Phi(t)\gamma + \mu L(t, F^{(k-1)}) + \lambda L(t, F^{(k)} - F^{(k-1)}) \tag{50.16}$$

并且定义 $R^{(k)}$ 为

$$R^{(k)}(\gamma; \mu, \lambda) \equiv \int_0^{2\pi} \Psi'(s) F(s, \zeta^{(k)}(s), \mu) ds, \tag{50.17}$$

$$|\gamma_i - c_i^*| \leqslant h \quad (i = 1, \cdots, m), \tag{50.18}$$

则当 η 充分小时, 对于满足 $\mu < \eta$ 的 μ 就有 $\zeta^{(k)} \in B$, 从而 $R^{(k)}$ 就可定义了。

再設 $\gamma^{(k)}(\mu, \lambda)$ 为 $R^{(k)}(\gamma; \mu, \lambda) = 0$ 的根,则可以仿 $P^{(k)}(c, \mu) = 0$ 的根为 $c^{(k)}(\mu)$ 的情况, 选取与 k 无关的 h, η, β, 当 $\mu < \eta$ 时就有 $|\gamma_i^{(k)}(\mu, \lambda) - c_i^*| \leqslant h$, 而且当 $\mu < \eta$, $|\gamma_i - c_i^*| \leqslant h$, 就有

$$\left|\det\left(\frac{\partial R^{(k)}}{\partial \gamma}\right)\right| > \beta \tag{50.19}$$

成立。由于

$$\frac{\partial R^{(k)}}{\partial \lambda} = \int_0^{2\pi} \Psi'(t) \frac{\partial F}{\partial x}(t, \zeta^{(k)}, \mu) L(t, F^{(k)} - F^{(k-1)}) dt,$$

即得

$$\left|\frac{\partial R_i^{(k)}}{\partial \lambda}\right| < 2\pi n^2 M_3 M_4 a_{k+1}. \tag{50.20}$$

此处假定 $\left|\frac{\partial F_s}{\partial x_t}\right| < M_3$, $|\psi_s^{(j)}| < M_4$.

再取与 k 无关的常数 M_5, 使得

$$\left|\frac{\partial R_i^{(k)}}{\partial \gamma_j}\right| < M_5. \tag{50.21}$$

另一方面,由 $c^{(k+1)} = \gamma^{(k)}(\mu, \mu)$, $c^{(k)} = \gamma^{(k)}(\mu, 0)$ 可以得到

$$c_i^{(k+1)}(\mu)-c_i^{(k)}(\mu)=\gamma_i^{(k)}(\mu,\ \mu)-\gamma_i^{(k)}(\mu,\ 0)$$
$$=\mu\left(\frac{\partial\gamma_i^{(k)}(\mu,\ \lambda)}{\partial\lambda}\right)_{\lambda=\theta\mu}\quad(0<\theta<1).\quad(50.22)$$

在此，如只将 γ 的第 i 个分量以 λ 代换后所得到向量为 $\bar{\gamma}$，就有

$$\det\left(\frac{\partial R^{(k)}}{\partial\bar{\gamma}^{(k)}}\right)=-\left(\frac{\partial\gamma_i^{(k)}(\mu,\ \lambda)}{\partial\lambda}\right)\det\left(\frac{\partial R^{(k)}}{\partial\gamma^{(k)}}\right)^{❶}.\quad(50.23)$$

由(50.20)，(50.21)，并設 M_6 是与 k 无关的常数，就可以写出

$$\left|\det\left(\frac{\partial R^{(k)}}{\partial\bar{\gamma}}\right)\right|<M_6a_{k+1}.\quad(50.24)$$

所以，由(50.19)，(50.22)，(50.23)，(50.24)就有

$$|c_i^{(k+1)}(\mu)-c_i^{(k)}(\mu)|<b_{k+1},\quad b_{k+1}=\mu M_6\beta^{-1}a_{k+1}.\quad(50.25)$$

由(50.15)就得到

$$\left.\begin{aligned}&a_{k+1}/a_k=anM_1(mM_2(b_k/a_k)+\mu),\\&b_{k+1}/b_k=\mu\beta^{-1}M_1M_6an(mM_2+\mu(a_k/b_k)).\end{aligned}\right\}\quad(50.26)$$

由于 b_k/a_k 含有 μ 作为其因子，由(50.26)可以知道当 μ 充分小时，a_{k+1}/a_k，b_{k+1}/b_k 的任何一个都小于一个比1小的常数。

因而对于充分小的 μ，$L(t,\ F^{(k)})$ 以及 $c^{(k)}(\mu)$ 是絕对而且一致收斂的。从而由(50.5)，$x^{(k)}(t)$ 一致收斂于某一个 $x(t,\ \mu)$。因为 $x^{(k)}(t)$ 具有周期 2π，所以 $x(t,\ \mu)$ 也具有周期 2π。又当 $\mu=0$ 时 $x^{(k)}(t)=p(t)$，所以有 $x(t,\ 0)=p(t)$。

当 $k\to\infty$ 时 $F^{(k)}\to F(t,\ x(t,\ \mu),\ \mu)$。所以 $L(t,\ F^{(k)})\to L(t,\ F(t,\ x(t,\ \mu),\ \mu))$。因而 $x(t,\ \mu)=x^*+\Phi(t)c(\mu)+\mu L(t,\ F(t,\ x(t,\ \mu),\ \mu))$。于是可知 $x(t,\ \mu)$ 是(47.1)的解❷。

---

❶ 此式中 $\bar{\gamma}^{(k)}$ 是将 $\gamma^{(k)}$ 第 i 个分量易以 λ 后所得到的向量，原书中 $\gamma^{(k)}$ 誤为 γ，$\bar{\gamma}^{(k)}$ 誤为 $\bar{\gamma}$，又等式右端漏—“－”号。——譯者注

❷ 因 $x(t,\mu)=x^*+\Phi c+\mu L(t,\ F(t,\ x(t,\ \mu),\ \mu))$，故 $\frac{d}{dt}x=\frac{d}{dt}(x^*+\Phi c)+\mu\frac{d}{dt}L(t,\ F)$，而依所設可知

$$\frac{d}{dt}(x^*+\Phi c)=A(x^*+\Phi c)+f,\quad \frac{d}{dt}L(t,\ F)=AL(t,\ F)+F,$$

于是 $\frac{dx}{dt}=A(x^*+\Phi c+\mu L(t,\ F))+f+\mu F=Ax(t,\ \mu)+f+\mu F$.——譯者注

綜括以上所述得到下一定理。

定理 7 設定理 5 的假設全都滿足。确定一个滿足 $c^{(1)}(0)=c^*$, $\int_0^{2\pi}\Psi'(t)F(t,\ x^*+\Phi c^{(1)}(\mu),\ \mu)dt=0$ 的 m 維向量 $c^{(1)}(\mu)$ 并且命 $x^{(1)}(t)=x^*(t)+\Phi(t)c^{(1)}(\mu)$。当 $x^{(k-1)}(t)$ 确定后，命 $F^{(k-1)}=F(t,\ x^{(k-1)},\ \mu)$，确定一个滿足 $c^{(k)}(0)=c^*$, $\int_0^{2\pi}\Psi'(t)F(t,\ x^*+\Phi c^{(k)}(\mu)+\mu L(t,\ F^{(k-1)}),\ \mu)dt=0$ 的 $c^{(k)}(\mu)$，($L(t,f)$ 的确定依 §46)，命 $x^{(k)}(t)=x^*(t)+\Phi(t)c^{(k)}(\mu)+\mu L(t,\ F^{(k-1)})$ ❶. 这样所确定的 $x^{(k)}(t)$，当 $k\to\infty$ 时，对于充分小的 μ，一致收斂到 (47.1) 的周期为 2π 的解 $x(t,\ \mu)$。

---

❶ 原书等式右端遺漏"$+\mu L(t,\ F^{(k-1)})$".——譯者注

第9章　概周期組

在前章里，設 f 以及 F 关于 t 具有周期 2π 而考察了方程

$$\frac{dx}{dt}=Ax+f(t)+\mu F(t,\ x,\ \mu).$$

在本章中，設 f 以及 F 是以 t 的三角多项式所表出（細节在 §51 中叙述），我們来論述在这一情况下，与前章相平行的結果。

§51　問題的說明

此处只考慮綫性方程 $\frac{dx}{dt}=Ax+f$，虽然 f 是三角多項式

$$f=\sum_{i=1}^{p}f_i,\quad f_i=a_i\cos\omega_i t+b_i\sin\omega_i t,$$

但这与前章情况沒有本质差别。理由是：設 x_i 是 $\frac{dx}{dt}=Ax+f_i$ 的解，則 $\sum x_i$ 就是开头所列方程的解。

在討論形如

$$\frac{dx}{dt}=Ax+f(t)+\mu F(t,\ x,\ \mu) \tag{51.1}$$

的方程时，虽然其中 f 及 F 是 t 的三角多項式，但与前章所讲的情况很不相同。

就簡单的例子来說明。考慮以 $f(x,\ y)$ 为 $x,\ y$ 的多項式的二阶方程

$$\frac{d^2x}{dt^2}+x-\mu f\left(x,\ \frac{dx}{dt}\right)=a_1\cos\omega_1 t+a_2\cos\omega_2 t\quad(\omega_i\neq 0,\ 1). \tag{51.2}$$

如果 ω_1/ω_2 是有理数，右端就是周期函数❶，所以就可以应用前章所述理論。但是当 ω_1/ω_2 是无理数时，問題完全是另外一件事了。

設 ω_1/ω_2 是无理数。如同前章中求周期解那样，設

$$x=x_0+\mu x_1+\mu^2 x_2+\cdots, \tag{51.3}$$

試行决定 $x_0, x_1, \cdots$，使得它們是有界的 $(-\infty<t<\infty)$。以(51.3)代入(51.2)并比較 μ^k 的系数，

$$\frac{d^2x_0}{dt^2}+x_0=a_1\cos\omega_1 t+a_2\cos\omega_2 t,$$

$$\frac{d^2x_1}{dt^2}+x_1=f\left(x_0, \frac{dx_0}{dt}\right),$$

$$\frac{d^2x_2}{dt^2}+x_2=f_x\left(x_0, \frac{dx_0}{dt}\right)x_1+f_y\left(x_0, \frac{dx_0}{dt}\right)\frac{dx_1}{dt},$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots.$$

由上列第一式，并以 c_1, c_2 为任意常数，得到

$$x_0=c_1\cos t+c_2\sin t+a_1(1-\omega_1^2)^{-1}\cos\omega_1 t+a_2(1-\omega_2^2)^{-2}\cos\omega_2 t.$$

把它代入上列第二式的右端并表成三角多項式的形式。为了使得第二式的解 x_1 是有界的(在 $-\infty<t<\infty$)，这一三角多項式的 $\cos t, \sin t$ 的系数就不能不是零。由这一条件确定 c_1, c_2。設 x_0 已如此定好。并設 c_1', c_2' 为任意常数，則第二式的解 x_1 就是 $x_1=c_1'\cos t+c_2'\sin t+\varphi_1(t)$ 的形式，因为第二式的右端三角多項式含有形如

$$A\cos(p\omega_1+q\omega_2)t, \quad B\sin(p\omega_1+q\omega_2)t \quad (p, q \text{ 是整数})$$

的項，所以，与此相对应地 $\varphi_1(t)$ 也就含有形如

---

❶ 設 $\frac{\omega_1}{\omega_2}=\frac{p}{s}$，則 $\frac{s}{\omega_2}=\frac{p}{\omega_1}$，以 k 表之即 $\frac{s}{\omega_2}=\frac{p}{\omega_1}=k$。于是

$$\cos\omega_1(t+k2\pi)=\cos\left(\omega_1 t+\omega_1\cdot\frac{p}{\omega_1}2\pi\right)=\cos\omega_1 t,$$

$$\cos\omega_2(t+k2\pi)=\cos\left(\omega_2 t+\omega_2\frac{s}{\omega_2}\cdot 2\pi\right)=\cos\omega_2 t.$$ ——譯者注

$$(1-(p\omega_1+q\omega_2)^2)^{-1}A\cos(p\omega_1+q\omega_2)t,$$
$$(1-(p\omega_1+q\omega_2)^2)^{-1}B\sin(p\omega_1+q\omega_2)t$$

的項。

其次，把以上所确定的 x_0 与 x_1 代入第三式的右端而表示成三角多項的形式，使 $\cos t$, $\sin t$ 的系数为零而确定 c_1', c_2'。

依同样的作法，依次确定 x_2, x_3, …. 对于 x_n 一般說它含有形如

$$(1-(p_n\omega_1+q_n\omega_2)^2)^{-1}\begin{matrix}A_n\cos\\B_n\sin\end{matrix}(p_n\omega_1+q_n\omega_2)t \quad (p_n,\ q_n \text{ 是整数})$$

的項，但由于 ω_1/ω_2 是无理数，

当 $n_i\to\infty$ 时 $(p_{n_i}\omega_1+q_{n_i}\omega_2)^2-1\to 0$ 是可能的。

所以此时就有 $|x_{n_i}(t)|\to\infty$.

由以上所述可以理解到，在用以(51.3)的形式求方程(51.2)的解的方法中，就引起了在周期的情况下所沒有遇見的困难。并且可以作出实际产生这样困难的例。这就是 Poincaré 所謂“小除数所形成的困难”(difficulty of small divisors)。

本章中，在假定下列 1°, 2°, 3° 之下来考虑方程(51.1)。

1° $f(t)$是三角多項式：

$$f(t)=a^{(0)}+\sum_{r=1}^{p}(a^{(r)}\cos\nu_r t+b^{(r)}\sin\nu_r t).$$

2° $F(t,x,\mu)$表示为 μ 的收斂冪級数($|\mu|<\mu_0$, μ_0 是与 t,x 无关的正数)：

$$F(t,\ x,\ \mu)=\sum_{m=0}^{\infty}F^{(m)}(t,\ x)\mu^m.$$

3° $F^{(m)}(t,\ x)$ 是 t 的三角多項式，它的系数是 x_1, x_2, …, x_n (x 的分量)的多項式：

$$F^{(m)}(t,\ x)=P^{(m,0)}(x)+\sum_{r=1}^{q}(P^{(m,r)}(x)\cos n_r t+Q^{(m,r)}(x)\sin n_r t).$$

三角多項式

$$a_0+\sum_{r=1}^{p}(a_r\cos\omega_r t+b_r\sin\omega_r t)$$

是一种叫做概周期函数的函数的特殊情况。在本章中方程(51.1)的概周期解（其分量x_s是概周期函数的解x）就是所要研究的問題。

在下一节中先将概周期函数的定义与其基本性质作一个簡单的說明。

§52 概周期函数

对于在$-\infty<t<\infty$内所定义的复数值連續函数$f(t)$，如有："对于任意正数ε，存在着一个正数$l(\varepsilon)$，使得长度为$l(\varepsilon)$的每个区間$(\alpha, \alpha+l(\varepsilon))$至少含有一个$\tau$，此$\tau$对于全直綫上所有$t$满足$|f(t+\tau)-f(t)|\leqslant\varepsilon$"成立，則称$f(t)$为概周期函数❶，称$\tau$为$f(t)$关于$\varepsilon$的概周期。

以T为周期的連續函数$f(t)$就是概周期函数，如果取T作为上述的$l(\varepsilon)$，这一事实就很清楚了❷。

下面我們介紹概周期函数的一些簡单的性质。

1° 概周期函数是有界的。

[任取实数t_0。再选取τ使得它满足$t_0-l(\varepsilon)<\tau<t_0$，于是有

$$|f(t+\tau)-f(t)|\leqslant\varepsilon.$$

命$t=t_0-\tau$，則由上式可得

$$|f(t_0)|\leqslant\varepsilon+|f(t_0-\tau)|.$$

因为$f(t)$是連續函数，所以在区間$[0, l(\varepsilon)]$上有$|f(t)|\leqslant M$。从而$|f(t_0)|\leqslant\varepsilon+M$。此式右端与$t_0$无关，又$t_0$是任意的。于是命題得到証明。]

---

❶ 本定义中$(\alpha, \alpha+l(\varepsilon))$易为閉区間$[\alpha, \alpha+l(\varepsilon)]$也无不可。在以下論述中比如2°的証明就有这种情况发生。——譯者注

❷ 此时关于概周期函数定义要参考注❶，不然則取$l(\varepsilon)=2T$。——譯者注

2° 概周期函数 $f(t)$ 是一致連續的。

[取任意的 $\varepsilon>0$. 由于有限閉区間上的連續函数在其上是一致連續的,所以可适当地选取 $\delta_1>0$,对于 $s_1,s_2\in[-1,1+l(\varepsilon/3)]$, $|s_1-s_2|<\delta_1$,就有

$$|f(s_1)-f(s_2)|\leqslant\varepsilon/3$$

成立。命 $\delta=\min(\delta_1,1)$. 取 $|t_1-t_2|<\delta$. 由概周期性就有 τ, 它满足 $t_1-l(\varepsilon/3)\leqslant\tau\leqslant t_1$, $|f(t+\tau)-f(t)|\leqslant\varepsilon/3$ (t 是任意的)。此时

$$0\leqslant t_1-\tau\leqslant l(\varepsilon/3),\quad -\delta\leqslant t_2-\tau\leqslant\delta+l(\varepsilon/3).$$

于是有

$$|f(t_1-\tau)-f(t_2-\tau)|\leqslant\varepsilon/3.$$

所以

$$|f(t_1)-f(t_2)|\leqslant|f(t_1)-f(t_1-\tau)|+|f(t_1-\tau)-f(t_2-\tau)|$$
$$+|f(t_2-\tau)-f(t_2)|\leqslant\varepsilon/3+\varepsilon/3+\varepsilon/3=\varepsilon.]$$

3° 使得在 $-\infty<t<\infty$ 所定义的复数值連續函数 $f(t)$ 是概周期函数,其充分而且必要条件是:

"对于任意的实数列 $\{h_n\}$,选取适当的子列 $\{h_{n_i}\}$,对此子列,函数列 $\{f(t+h_{n_i})\}$ 在 $(-\infty,\infty)$ 内是一致收斂的。"

[必要。首先我們来証,对于任意的正数 ε 可选取 $\{h_n\}$ 的一个子列 $\{h_{n_i}\}$,使得下式成立:

$$\sup_t|f(t+h_{n_j})-f(t+h_{n_k})|<\varepsilon. \qquad (*)$$

因为 $f(t)$ 是概周期函数,所以存在有 τ_n,使得

$$h_n-l(\varepsilon/4)\leqslant\tau_n\leqslant h_n,\quad |f(t+\tau_n)-f(t)|\leqslant\varepsilon/4.$$

命 $r_n=h_n-\tau_n$, 由于 $0\leqslant r_n\leqslant l(\varepsilon/4)$, $\{r_n\}$ 具有极限点 r❶. 在此决定一个使得 $|t_1-t_2|<\delta\Rightarrow|f(t_1)-f(t_2)|<\varepsilon/2$ 成立的 δ (由

❶ 当 $\{r_n\}$ 为无穷,则此 r 存在,从而得知 $\{r_n\}$ 有子列 $\{r_{n'}\}$ 趋于 r,由此 $\{r_{n'}\}$ 可确定下面所要的 $\{r_{n_i}\}$;但当 $\{r_n\}$ 有穷,则 $\{r_n\}$ 中必有 $\{r_{n_i}\}$ 使得 $r_{n_1}=r_{n_2}=r_{n_3}=\cdots=r$,由此也可确定下面所要的 $\{r_{n_i}\}$。——譯者注

2°),并設$\{r_n\}$的一个子列$\{r_{n_i}\}$滿足$r-\delta/2<r_n<r+\delta/2$。此时

$$\sup_t|f(t+h_{n_j})-f(t+h_{n_k})|=\sup_t|f(t+\tau_{n_j}-\tau_{n_k}+r_{n_j}-r_{n_k})-f(t)|$$
$$\leqslant\sup_t|f(t+\tau_{n_j}-\tau_{n_k}+r_{n_j}-r_{n_k})-f(t+r_{n_j}-r_{n_k})|$$
$$+\sup_t|f(t+r_{n_j}-r_{n_k})-f(t)|.$$

上式右端第一項$<\varepsilon/4+\varepsilon/4=\varepsilon/2$。并且由于$|r_{n_j}-r_{n_k}|<\delta$,右端第二項是$\varepsilon/2$。于是(*)式得到証明。

应用这一事实,选取$\{h_n\}$的一个子列$\{h_{n_i}^{(1)}\}$使得$|f(t+h_{n_j}^{(1)})-f(t+h_{n_k}^{(1)})|<1$成立。其次在子列$\{h_{n_i}^{(1)}\}$中再选取一个子列$\{h_{n_i}^{(2)}\}$使得

$$|f(t+h_{n_j}^{(2)})-f(t+h_{n_k}^{(2)})|<1/2$$

成立。将这一作法继續下去,在$\{h_{n_i}^{(l-1)}\}$中选取其子列$\{h_{n_i}^{(l)}\}$使得

$$|f(t+h_{n_j}^{(l)})-f(t+h_{n_k}^{(l)})|<1/l$$

成立。此时函数列

$$f(t+h_{n_1}^{(1)}),\quad f(t+h_{n_2}^{(2)}),\quad f(t+h_{n_3}^{(3)}),\ \cdots$$

在$(-\infty,\infty)$内一致收斂。

充分。設$f(t)$不是概周期函数。依定义,存在有某一正数ε,对于任意的实数h_1,存在有区間(a_2,b_2),它的长度比$2|h_1|$大,但不含有"$f(t)$关于ε的概周期"。設h_2为这一区間的中点,則$h_2-h_1\in(a_2,b_2)$。其次,存在有区間(a_3,b_3),它的长度比$2(|h_1|+|h_2|)$大,但不含有"$f(t)$关于ε的概周期"。設h_3是这一区間的中点,則h_3-h_1,$h_3-h_2\in(a_3,b_3)$。同样地作出h_4,h_5,$\cdots$,則$h_j-h_i\,(j>i)$都不是"$f(t)$关于ε的概周期"。所以有

$$\sup_t|f(t+h_i)-f(t+h_j)|=\sup_t|f(t+h_i-h_j)-f(t)|>\varepsilon.$$

这就表示,对于实数列$\{h_i\}$,我們在开头所举出的条件不能得到滿足。]

4° 概周期函数的和,差,积也都是概周期函数。

[設$f(t)$,$g(t)$为概周期函数。由3°,对于任意实数列$\{h_i\}$选

取一个子列$\{h_i'\}$，使得函数列$\{f(t+h_i')\}$是一致收斂的。其次，在前一子列$\{h_i'\}$中再选取子列$\{h_i''\}$，使得函数列$\{g(t+h_i'')\}$是一致收斂的。此时函数列

$$\{f(t+h_i'')+g(t+h_i'')\},\ \{f(t+h_i'')-g(t+h_i'')\},$$
$$\{f(t+h_i'')\cdot g(t+h_i'')\}$$

的任何一个都是一致收斂的。于此再应用3°就可以导出命题的結論。]

5° 如果$f(t)$是概周期函数而且$|f(t)|\geqslant\alpha>0$，則$\dfrac{1}{f(t)}$也是概周期函数。

[可以应用3°进行証明。]

6° 如果$f_i(t)\ (i=1, 2, \cdots)$是概周期函数，而$f_i(t)$一致收斂于$f(t)$，則$f(t)$也是概周期函数。

[設$f(t)$不是概周期函数。由3°❶可知存在有某一正数ε与某一实数列$\{h_i\}$使得

$$\sup_t|f(t+h_i)-f(t+h_k)|>\varepsilon \quad (j\neq k).$$

另一方面，由假設条件，对于充分大的n，有

$$\sup_t|f(t)-f_n(t)|<\varepsilon/3$$

成立，由于$f_n(t)$是概周期函数，由3°可知，取$\{h_i\}$的适当的一个子列$\{h_{i'}\}$，可使得函数列$\{f_n(t+h_{i'})\}$一致收斂。这就是說取适当的$N=N(\varepsilon)$，

当$i', j'\geqslant N$时，就有$\sup\limits_t|f_n(t+h_{i'})-f_n(t+h_{j'})|<\varepsilon/3$.

所以当$i', j'\geqslant N$时，就有

$$\begin{aligned}\sup_t|f(t+h_{i'})-f(t+h_{j'})|&\leqslant\sup_t|f(t+h_{i'})-f_n(t+h_{i'})|\\&+\sup_t|f_n(t+h_{i'})-f_n(t+h_{j'})|+\sup_t|f_n(t+h_{j'})-f(t+h_{j'})|\\&\leqslant\varepsilon/3+\varepsilon/3+\varepsilon/3=\varepsilon.\end{aligned}$$

---

❶ 見3°充分性証明中开头的那一段。——譯者注

于此导致矛盾。]

7° 对于概周期函数 $f(t)$，存在有

$$\lim_{T\to\infty}\frac{1}{T}\int_0^T f(t)\,dt.$$

这一值叫做 $f(t)$ 的平均值，并記以 $M(f)$。

[任給一个 $\varepsilon>0$. 設 k 为整数($\geqslant 0$)，确定一个满足

$$|f(t+\tau_k)-f(t)|\leqslant\varepsilon,\quad kT<\tau_k<kT+l(\varepsilon)$$

的 τ_k。

$$\int_{kT}^{(k+1)T} f(t)\,dt=\int_{kT-\tau_k}^{(k+1)T-\tau_k} f(t+\tau_k)\,dt$$

$$=\left\{\int_0^T+\int_{kT-\tau_k}^0+\int_T^{(k+1)T-\tau_k}\right\}f(t+\tau_k)\,dt.$$

命 $G=\sup\limits_t|f(t)|$，上式右端后二积分之和的絕对值不超过 $2G\cdot l(\varepsilon)$。所以

$$\left|\int_{kT}^{(k+1)T}f(t)\,dt-\int_0^T f(t)\,dt\right|\leqslant\varepsilon\cdot T+2G\cdot l(\varepsilon)\text{ ❶}.$$

从而

$$\left|\frac{1}{nT}\int_0^{nT}f(t)\,dt-\frac{1}{T}\int_0^T f(t)\,dt\right|$$

$$\leqslant\sum_{k=0}^{n-1}\left|\frac{1}{nT}\int_{kT}^{(k+1)T}f(t)\,dt-\frac{1}{nT}\int_0^T f(t)\,dt\right|$$

$$\leqslant(nT)^{-1}(n\varepsilon T+2nG\cdot l(\varepsilon))=\varepsilon+2T^{-1}G\cdot l(\varepsilon).$$

此处，設 T' 满足 $nT<T'\leqslant(n+1)T$，則

$$\left|\int_0^{T'}f(t)\,dt-\int_0^{nT}f(t)\,dt\right|\leqslant G\cdot(T'-nT)\text{ ❷}.$$

所以

---

❶ 从上等式左右两端各减去 $\int_0^T f(t)\,dt$ 即可。——譯者注

❷ 原书不等式右端誤为 $G\cdot T$。——譯者注

$$\left|\frac{1}{T'}\int_0^{T'} f(t)\,dt-\frac{1}{nT}\int_0^{nT} f(t)\,dt\right|$$

$$\leqslant\left|\frac{1}{T'}\int_0^{T'}-\frac{1}{T'}\int_0^{nT}\right|+\left(\frac{1}{nT}-\frac{1}{T'}\right)\left|\int_0^{nT} f(t)\,dt\right|$$

$$\leqslant\frac{1}{T'}(T'-nT)G+\frac{T'-nT}{nTT'}nT\cdot G<\frac{2G}{n}.$$

从而

$$\left|\frac{1}{T'}\int_0^{T'}f(t)\,dt-\frac{1}{T'}\int_0^{T}f(t)\,dt\right|<\varepsilon+\frac{2G\cdot l(\varepsilon)}{T}+\frac{2G}{n}.$$

再設 $n_1>n$, $n_2>n$，并取 T_1, T_2 使它們満足

$$n_1T<T_1\leqslant(n_1+1)T,\quad n_2T<T_2\leqslant(n_2+1)T.$$

此时

$$\left|\frac{1}{T_1}\int_0^{T_1}f(t)\,dt-\frac{1}{T_2}\int_0^{T_2}f(t)\,dt\right|$$

$$\leqslant\left|\frac{1}{T_1}\int_0^{T_1}-\frac{1}{T}\int_0^{T}\right|+\left|\frac{1}{T_2}\int_0^{T_2}-\frac{1}{T}\int_0^{T}\right|$$

$$\leqslant 2\varepsilon+4T^{-1}\cdot G\cdot l(\varepsilon)+4n^{-1}\cdot G.$$

在此将 T 取得充分大 $(T\geqslant 4G\cdot l(\varepsilon)/\varepsilon)$，并設正整数 n 也充分大 $(n\geqslant 4G/\varepsilon)$，則对于上述 T_1, T_2 有

$$\left|\frac{1}{T_1}\int_0^{T_1}f(t)\,dt-\frac{1}{T_2}\int_0^{T_2}f(t)\,dt\right|\leqslant 4\varepsilon.$$

因而証明了 $\lim\limits_{T\to\infty}\dfrac{1}{T}\displaystyle\int_0^T f(t)\,dt$ 存在。]

例 三角多項式

$$f(t)=a_0+\sum_{r=1}^{p}(a_r\cos\nu_r t+b_r\sin\nu_r t)$$

是概周期函数[由 4° 可知]，而且 $M(f)=a_0$。

8° 設 $f(t)$ 是概周期函数，λ 是实部不是零的复数，n 是 $\geqslant 1$ 的整数。再設当 $\mathrm{Re}\lambda>0$ 时，c 表 $+\infty$，当 $\mathrm{Re}\lambda<0$ 时 c 表 $-\infty$，則

$$g(t)=\int_c^t (t-s)^n e^{\lambda(t-s)}f(s)\,ds$$

就是概周期函数。并且

若 $|f(t)|<M$，則 $|g(t)|<(n!)|\mathrm{Re}\lambda|^{-n}M$。

[給定任意 $\varepsilon_1>0$，确定一个正数 $l=l(\varepsilon_1)$，在长度为 l 的任意区間内，必有 τ 使得

$$|f(t+\tau)-f(t)|\leqslant\varepsilon_1.$$

此时

$$\begin{aligned}|g(t+\tau)-g(t)|&=\left|\int_c^{t+\tau}(t+\tau-s)^n e^{\lambda(t+\tau-s)}f(s)\,ds\right.\\&\quad\left.-\int_c^t(t-s)^n e^{\lambda(t-s)}f(s)\,ds\right|\\&\leqslant\left|\int_c^t(t-s)^n e^{\lambda(t-s)}(f(s+\tau)-f(s))\,ds\right|^{❶}\\&\leqslant\varepsilon_1\left|\int_c^t(t-s)^n e^{(\mathrm{Re}\lambda)(t-s)}\,ds\right|\\&=\varepsilon_1\int_0^\infty s^n e^{-|\mathrm{Re}\lambda|s}ds=(n!)|\mathrm{Re}\lambda|^{-n}\varepsilon_1.\end{aligned}$$

所以当任意給定 $\varepsilon>0$ 时，在长度为 $l=l(\varepsilon|\mathrm{Re}\lambda|^n/n!)$ 的任意的区間内，使得 $|g(t+\tau)-g(t)|\leqslant\varepsilon$ 的 τ 是存在的。从而 $g(t)$ 是概周期函数。$|g(t)|$ 的估值式显然由上述关系式即可得知。]

特別地，当 $f(t)=f_0e^{i\omega t}$ 时，就有 $g(t)=g_0e^{i\omega t}$。

§53 綫性方程

考虑方程

$$\frac{dx}{dt}=Ax+f(t),\tag{53.1}$$

其中 $A=(a_{ij})$ 是 n 阶常数矩陣，$f(t)$ 是其分量为概周期函数的 n 維向量。对这一方程下述性质成立。

定理 1 設 A 的特征值的实部都不是零。此时 (53.1) 有唯一的一个概周期解（分量都是概周期函数的解）$x(t)$，而且

❶ 注意 $c=\pm\infty$，从而 $c-\tau=c$。——譯者注

$$|x_s(t)| \leqslant aM \tag{53.2}$$

成立。此处 M 是满足 $|f_s(t)| \leqslant M$ 的常数，a 是只与 A 的元素有关而与 $f(t)$ 无关的常数。

証明　設 $x^{(1)}(t)$，$x^{(2)}(t)$ 为(53.1)的两个解，則

$$x^{(2)}(t) - x^{(1)}(t) = e^{tA}c \quad (c \text{ 是常数向量})。$$

因为 A 的特征值的实部都不是零，所以为了使得 $x^{(2)}(t) - x^{(1)}(t)$ 在 $(-\infty, \infty)$ 有界，就非有 $c=0$ 不可，也就是 $x^{(2)}(t) = x^{(1)}(t)$ ❶。于是証明了如果方程有概周期解就只能有一个。

其次，証明概周期解的存在。考虑 A 的 Jordan 型。也就是說选出的非异矩陣 P(其元素一般是复数)，使得 $P^{-1}AP$ 表成形如

$$P^{-1}AP = A_1 \dotplus A_2 \dotplus \cdots \dotplus A_l. \tag{53.3}$$

此处 A_i 是 k_i 阶的如下的矩陣：

$$\begin{pmatrix} \lambda_i & & & 0 \\ 1 & \lambda_i & & \\ & \ddots & \ddots & \\ 0 & & 1 & \lambda_i \end{pmatrix} \text{或} (\lambda_i).$$

由 $x = Py$，(53.1)就化为 $\dfrac{dy}{dt} = P^{-1}APy + P^{-1}f(t)$。設 $h^{(i)}(t)$ 是由 $P^{-1}f(t)$ 的第 $k_1 + \cdots + k_{i-1} + j$ $(j = 1, \cdots, k_i)$ 个分量所成的 k_i 維的向量，进而考虑方程

$$\frac{dy^{(i)}}{dt} = A_i y^{(i)} + h^{(i)}(t). \tag{53.4}$$

設 $\mathrm{Re}\lambda_i > 0$ 时，$c = +\infty$；$\mathrm{Re}\lambda_i < 0$ 时，$c = -\infty$，則

$$y^{(i)}(t) = \int_c^t e^{A_i(t-s)} h^{(i)}(s)\,ds$$

就是(53.4)的概周期解。

实际上，由于

---

❶ 可参看第5章§40中(40.3)，(40.4)等。——譯者注

$$e^{A_i t}=\begin{pmatrix} e^{t\lambda_i} & & & 0 \\ te^{t\lambda_i} & e^{t\lambda_i} & & \\ \vdots & \vdots & \ddots & \\ \frac{t^{k_i-1}}{(k_i-1)!}e^{t\lambda_i} & \frac{t^{k_i-2}}{(k_i-2)!}e^{t\lambda_i} & \cdots & e^{t\lambda_i} \end{pmatrix}$$

$y^{(i)}(t)$的分量就是

$$\frac{1}{(l-1)!}\int_c^t (t-s)^{l-1}e^{\lambda_i(t-s)}h_l(s)ds$$

的和的形式。但依假設可知$h_l(t)$为概周期函数，所以，由§52的8°，4°，$y^{(i)}(t)$就是概周期函数。继而当$|h_l(t)|<M_1$时$|y^{(i)}(t)|<a_1M_1$。显然，$y^{(i)}(t)$❶就是(53.4)的解。

設$y(t)$是依$y^{(1)}, y^{(2)}, \cdots, y^{(l)}$的顺序而作成纵排列的$n$維向量，則$x(t)=Py(t)$就是(53.1)的概周期解。并且当$|f(t)|<M$时$|h_s^{(i)}(t)|<a_2M$，所以有$|x_s(t)|<a_1a_2a_3M$。 証毕

注意1 当$f(t)$是三角多項式时，(53.1)的概周期解$x(t)$也是三角多項式。这一事实易从上述証明及8°导出。

注意2 当A的特征値的实部的一个趋于零，則(53.2)的a趋于$+\infty$，因为在上述証明中的a_1含有因子$|\mathrm{Re}\lambda_i|^{-k_i}$。

例1 $$\frac{d^2x}{dt^2}+c\frac{dx}{dt}+x=f(t). \tag{53.5}$$

此处設$c>0$，而且$f(t)$是概周期函数。

設$\frac{dx}{dt}=y$而化(53.5)为方程組的形式，則$A=\begin{pmatrix}0 & 1\\ -1 & -c\end{pmatrix}$，所以$A$的特征値是$\lambda^2+c\lambda+1=0$的两个根$\lambda_1, \lambda_2$，由于$c>0$而有$\mathrm{Re}\lambda_i<0$。实际上求概周期解时，也可仿在上述証明中那样把$A$作为标准型来計算，但也可以由(53.5)直接計算。(53.5)的唯一的概周期解$x_0(t)$为

$$x_0(t)=\begin{cases}\frac{1}{\lambda_1-\lambda_2}\int_{-\infty}^t (e^{\lambda_1(t-s)}-e^{\lambda_2(t-s)})f(s)ds & (\lambda_1\neq\lambda_2),\\ \int_{-\infty}^t (t-s)e^{-(t-s)}f(s)ds & (\lambda_1=\lambda_2=-1).\end{cases} \tag{53.6}$$

❶ 原书誤为$y_l(t)$。——譯者注

特别当 $f(t)=\sum_{r=1}^{p} a_r e^{i\omega_r t}$ 时，

$$x_0(t)=\sum_{r=1}^{p} b_r e^{i\omega_r t}.$$

此处

$$b_r=\begin{cases} \dfrac{a_r}{\lambda_1-\lambda_2}\displaystyle\int_0^\infty (e^{\lambda_1 u}-e^{\lambda_2 u})e^{-i\omega_r u}du & (\lambda_1\neq\lambda_2), \\ a_r\displaystyle\int_0^\infty ue^{-u}e^{-i\omega_r u}du & (\lambda_1=\lambda_2=-1). \end{cases}$$

如以实数形表示(53.6)，就有

$$x_0(t)=\int_{-\infty}^{t}\varphi(t-s)f(s)ds=\int_0^\infty \varphi(s)f(t-s)ds. \tag{53.7}$$

此处 $$\varphi(t)=\begin{cases} 2(4-c^2)^{-1/2}e^{-(c/2)t}\sin\sqrt{1-(c^2/4)}\,t & (0<c<2), \\ te^{-t} & (c=2), \\ 2(c^2-4)^{-1/2}e^{-(c/2)t}\sinh\sqrt{c^2/4-1}\,t & (2<c). \end{cases}$$

設 $|f(t)|\leqslant H$，则由(53.7)可得

$$|x_0(t)|\leqslant aH.$$

此处 $$a=\int_0^\infty |\varphi(s)|ds=\begin{cases} \coth\dfrac{c\pi}{2\sqrt{4-c^2}} & (0<c<2), \\ 1 & (2\leqslant c). \end{cases} \tag{53.8}$$

其次，考虑 A 的特征值中有实部为零的情况。考虑 A 的 Jordan 型：

$$P^{-1}AP=A_1\dot{+}A_2\dot{+}\cdots\dot{+}A_m\dot{+}B_1. \tag{53.9}$$

此处設 A_p 是 n_p 阶矩陣

$$A_p=\begin{pmatrix} \lambda_p & & & 0 \\ 1 & \lambda_p & & \\ & \ddots & \ddots & \\ 0 & & 1 & \lambda_p \end{pmatrix} \text{或 } A_p=(\lambda_p) \text{ 而 } \mathrm{Re}\lambda_p=0.$$

并設 B_1 沒有实部为零的特征值。

在 λ_p 中不是零的有 $2j$ 个(λ_p 是 A 的特征值，因为 A 的元素是实数，所以 λ_p 以共軛形式出現)，設它們是 $\pm ik_1$, $\pm ik_2$, $\cdots$, $\pm ik_j$. (k_p 是 $\neq 0$ 的实数，它們之間可以相等。) 并且在 λ_p 中有 l

个零。这就有 $m=2j+l$.

此时在 $\frac{dx}{dt}=Ax$ 的解中恰有 m 个綫性无关的有界（在 $-\infty<t<\infty$ 内）的解。設它們是 $\varphi^{(1)}, \varphi^{(2)}, \cdots, \varphi^{(m)}$。

[实际上，設 c 是任意的 n 維常数向量，$\frac{dx}{dt}=Ax$ 的解可以写成

$$x=e^{At}c=P(e^{A_1t}\dotplus e^{A_2t}\dotplus\cdots\dotplus e^{A_mt}\dotplus e^{B_1t})P^{-1}c.$$

取 $P^{-1}c$ 的第一个分量为 1 而其他为零，这样所得到的 n 維向量以 $P^{-1}c^{(1)}$ 表之，一般地取 $P^{-1}c$ 的第 $n_1+n_2+\cdots+n_{p+1}$ 的分量为 1 而其他分量为零，这样所得到的 n 維向量以 $P^{-1}c^{(p+1)}$ 表之 $(p=1, 2, \cdots, m-1)$. 此时

$$\varphi^{(i)}=e^{At}c^{(i)}\quad (i=1, 2, \cdots, m)$$

就是 $\frac{dx}{dt}=Ax$ 的 m 个独立的有界（在 $-\infty<t<\infty$ 内）的解。并且当 $e^{At}c^{(0)}$ 是 $\frac{dx}{dt}=Ax$ 的有界的解时，$P^{-1}c^{(0)}$ 就一定是 $P^{-1}c^{(1)}, \cdots, P^{-1}c^{(m)}$ 的綫性組合。所以 $c^{(0)}$ 是 $c^{(1)}, \cdots, c^{(m)}$ 的綫性組合，从而 $e^{At}c^{(0)}$ 就是 $\varphi^{(1)}, \varphi^{(2)}, \cdots, \varphi^{(m)}$ 的綫性組合。]

$\varphi^{(1)}, \varphi^{(2)}, \cdots, \varphi^{(m)}$ 的选取方法可以有很多种，例如以 $u^{(r)}+\sqrt{-1}\,v^{(r)}$ 为对应于 A 的特征值 $\sqrt{-1}\,k_r$ 的特征向量，$w^{(s)}$ 为对应于 A 的特征值零的特征向量，則

$$u^{(r)}\cos k_rt-v^{(r)}\sin k_rt,\quad u^{(r)}\sin k_rt+v^{(r)}\cos k_rt,\quad w^{(s)}$$
$$(r=1, 2, \cdots, j;\ s=1, 2, \cdots, l)$$

这 m 个可以当做一組 $\varphi^{(1)}, \varphi^{(2)}, \cdots, \varphi^{(m)}$ 来看待。

同样地，在

$$\frac{dy}{dt}=-A'y$$

解中也恰有 m 个綫性无关的有界（在 $-\infty<t<\infty$ 内）的解。設它們是 $\psi^{(1)},\psi^{(2)},\cdots,\psi^{(m)}$. 以 Ψ 表示 $\psi^{(i)}$ 为第 i 列的 (n, m) 矩陣:

$$\Psi(t)=(\psi^{(1)}(t)\psi^{(2)}(t)\cdots\psi^{(m)}(t)). \tag{53.10}$$

特别在命

$$\left.\begin{aligned}&\bar\psi^{(r)}=p^{(r)}\cos k_rt-q^{(r)}\sin k_rt\\&\bar\psi^{(j+r)}=p^{(r)}\sin k_rt+q^{(r)}\cos k_rt\end{aligned}\quad(r=1,\ 2,\ \cdots,\ j),\right\}$$
$$\bar\psi^{(2j+s)}=r^{(s)}\qquad (s=1,\ 2,\ \cdots,\ l) \tag{53.11}$$

时，以 $\bar\Psi$ 表示 $\bar\psi^{(i)}$ 为第 i 列的 $(n,\ m)$ 矩陣：

$$\bar\Psi(t)=(\bar\psi^{(1)}(t)\bar\psi^{(2)}(t)\cdots\bar\psi^{(m)}(t)). \tag{53.12}$$

定理2　在方程 (53.1) 中假設 A 是 (53.9) 的形式，f 是三角多項式。此时(53.1)有概周期解的充分而且必要的条件就是

$$\lim_{t\to\infty}\frac{1}{t}\int_0^t\Psi'(s)f(s)ds=0. \tag{53.13}$$

証明　必要。設 $x(t)$ 为(53.1)的概周期解。于是

$$\frac{d}{dt}(\Psi'(t)x(t))=\frac{d}{dt}(\Psi'(t))x(t)+\Psi'(t)\frac{d}{dt}x(t)$$
$$=-\Psi'Ax+\Psi'(Ax+f)=\Psi'(t)f(t).$$

所以

$$\Psi'(t)x(t)-\Psi'(0)x(0)=\int_0^t\Psi'(s)f(s)ds.$$

因为 $\Psi'(t)$ 的元素与 $x(t)$ 的分量都是有界的，所以上式左端除以 t 后，对于 $t\to\infty$ 的极限就是零。因此(53.13)成立。

充分。以(53.12)的 $\bar\Psi$ 作为(53.13)的 Ψ（由于 $\Psi(s)=\bar\Psi(s)K$，此处 K 是常数矩陣，而 $\det K\neq0$）。于此假定

$$\lim_{t\to\infty}\frac{1}{t}\int_0^t\bar\Psi'(s)f(s)ds=0. \tag{53.14}$$

設

$$f(t)=a^{(0)}+\sum(a^{(r)}\cos\nu_rt+b^{(r)}\sin\nu_rt),$$

右端的 $\sum$ 表示有限和。于此我們考虑方程

$$\frac{dx}{dt}=Ax+a^{(r)}\cos\nu_rt+b^{(r)}\sin\nu_rt. \tag{53.15}$$

由 §46 的定理 1，如果 A 不具有 $\nu_r\sqrt{-1}$ 的整数倍的特征值，这一方程就具有周期为 $2\pi/\nu_r$ 的解。而在 A 的特征值中如果有

$\nu_r\sqrt{-1}$ 的整数倍，则設它是 $\pm k_p\sqrt{-1}$，此时再由 §46 的定理 2 更当

$$\int_0^{2\pi/\nu_r}(a^{(r)}\cos\nu_r t+b^{(r)}\sin\nu_r t,\ \overline{\psi}^{(p)}(t))dt=0, \qquad (53.16)$$

则方程(53.15)具有以 $2\pi/\nu_r$ 为周期的解。然而由 (53.14)，可知(53.16)是成立的❶。于是可知(53.15)具有周期为 $2\pi/\nu_r$ 的解 $x^{(r)}(t)$。再考慮方程

$$\frac{dx}{dt}=Ax+a^{(0)}. \qquad (53.17)$$

如果在 A 的特征值中沒有零时，$-A^{-1}a^{(0)}$就是这一方程的解❷。而在 A 的特征值中有零时，将 A 当作 (53.9) 的形状，取(53.11)所給的 $r^{(1)},\cdots,r^{(l)}$. 由(53.14)，$(a^{(0)},r^{(i)})=0\ (i=1,2,\cdots,l)$. 由于 $A'r^{(i)}=0$，$r^{(i)}$ 与 A 的列所作的 n 个向量是正交的。所以把 $a^{(0)}$ 作为第$(n+1)$列加到 A 中所得到的$(n,n+1)$矩陣的秩不超过 $n-l$. 另一方面，由于 A 的秩是 $n-l$，所以 $Ax+a^{(0)}=0$ 具有解 $x^{(0)}$。这就是(53.17)的解。

由以上所述，(53.1)以 $x^{(0)}+\sum x^{(r)}(t)$ 为其解，这就証明了它有概周期解。 証毕

❶ 因欲(53.16)成立，只須考慮 $\nu_r=k_p$ 的情况，即能証

$$\int_0^{2\pi/\nu_r}(a^{(r)}\cos\nu_r t+b^{(r)}\sin\nu_r t,\ \overline{\varphi}^{(p)})dt=0,$$

此处 $\nu_r=k_p$ 就可以了。而从(53.14)可推出

$$\lim_{t\to\infty}\frac{1}{t}\int_0^t(a^{(r)}\cos\nu_r t+b^{(r)}\sin\nu_r t,\ \overline{\varphi}^{(p)})dt=0,$$

由此，$\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{n\cdot\frac{2\pi}{\nu_r}}\int_0^{n\cdot\frac{2\pi}{\nu_r}}=0$，但由于被积分函数具有周期 $\frac{2\pi}{\nu_r}$，因此

$$\int_0^{n\cdot\frac{2\pi}{\nu_r}}=n\int_0^{\frac{2\pi}{\nu_r}},$$

从而可推出所須要証的結果。——譯者注

❷ 因矩陣 A 具有零特征値 $\rightleftarrows$ $\det A=0$.——譯者注

在定理 2 的假定与(53.13)得到满足的情况下，設(53.1)的概周期解的一个为 $x^*(t)$. 又令 $\Phi(t)$ 表示前述 $\varphi^{(i)}(t)\left(\frac{dx}{dt}=Ax\right.$ 的綫性无关解$\left.\right)$为第 i 列的(n, m)矩陣，則(53.1)的任意的概周期解可以表示为

$$x^*(t)+\Phi(t)c,$$

其中 c 是任意的 m 維常数向量。这就是一个三角多项式。

例 2 $\frac{d^2x}{dt^2}+x=f(t)$，$f(t)$是三角多項式。

这一方程具有概周期解的充分而且必要条件是

$$\lim_{t\to\infty}\frac{1}{t}\int_0^t f(s)\sin s\,ds=\lim_{t\to\infty}\frac{1}{t}\int_0^t f(s)\cos s\,ds=0.$$

而

$$f(t)=a_0+\sum_{r=1}^{n}(a_r\cos\nu_r t+b_r\sin\nu_r t),$$

此处任何一个 ν_r 都不是 1. 在此情况下，含有以

$$g(t)=a_0+\sum_{r=1}^{n}(1-\nu_r^2)^{-1}(a_r\cos\nu_r t+b_r\sin\nu_r t)$$

所表示的 $g(t)$ 的通解

$$c_1\cos t+c_2\sin t+g(t)\quad(c_1,\ c_2\text{是任意常数})$$

就是概周期解。

§ 54 非綫性方程(特殊情况)

在本节中，設(51.1)中的 f 与 F 滿足 § 51 的 1°, 2°, 3°, 关于 A 的条件，考慮如下的三种特殊情况:

(I) A 不具有实部为零的特征值。

(II) $A=0$, $f=0$.

(III) A 的特征值的实部都是零，且可选出适当的非异矩陣 P (元素一般是复数)使得 $P^{-1}AP$ 化为对角矩陣。

首先从(I)开始討論。

在这一情况下，在(51.1)中置 $\mu=0$ 而得到的綫性方程，由定

理1可知,只有唯一的一个概周期解 $x^{(0)}(t)$. 其次,方程

$$\frac{dx}{dt}=Ax+f(t)+\mu F(t,\ x^{(0)},\ \mu),$$

仍由同一个定理,亦只有唯一的一个概周期解。設它是 $x^{(1)}(t)$. 如此进行下去,到 $x^{(k-1)}(t)$ 时,可以决定一个作为

$$\frac{dx}{dt}=Ax+f(t)+\mu F(t,\ x^{(k-1)},\ \mu) \tag{54.1}$$

的唯一的概周期解 $x^{(k)}(t)$.

这样决定的叙列 $\{x^{(k)}(t)\}$, 对于充分小的 μ 是一致收斂的,而且它的极限 $x^*(t)$ 就是 (51.1) 的解, 这一事实是可以証明的(在 §56 中証明)。

这样我們就有下述定理。

定理3 在方程(51.1)中, 設 A 沒有实部为零的特征值。并設 f 与 F 滿足 §51 的1°, 2°, 3°. 今設 $x^{(0)}(t)$ 为 $\frac{dx}{dt}=Ax+f$ 的唯一的概周期解,并由概周期的 $x^{(k-1)}(t)$ 决定了 $x^{(k)}(t)$ 使之作为(54.1)的概周期解(也是唯一的一个)。此时对于充分小的 μ, 当 $k\to\infty$ 时 $x^{(k)}(t)$ 一致收斂于(51.1)的概周期解 $x(t,\ \mu)$.

例1 $$\frac{d^2x}{dt^2}+c\frac{dx}{dt}+x=f(t)+\mu x^p, \tag{54.2}$$

設 $c>0$ 且 $f(t)$ 是概周期函数。并設 p 为 $\geqslant 2$ 的整数。

今应用定理3, 由前节例可知,在 $\mu=0$ 的情况下, 概周期解 $x_0(t)$ 可由(53.7)求得。当概周期函数 $x_{k-1}(t)$ 决定后,命 $x_k(t)$ 为方程

$$\frac{d^2x}{dt^2}+c\frac{dx}{dt}+x=f(t)+\mu x_{k-1}^p(t)$$

的唯一的概周期解。使用(53.7)的記号,可以写成

$$x_k(t)=x_0(t)+\mu\int_0^\infty \varphi(s)x_{k-1}^p(t-s)ds. \tag{54.3}$$

根据定理3, 对于充分小的 μ, $x_k(t)$ 一致收斂于 (54.2) 的概周期解。在此我們不根据定理3而直接証它。命

$$M_k=\sup_t|x_k(t)|,$$

并設 a 是由(53.8)所給定的正数，由(54.3)，就得到

$$M_k \leqslant M_0 + \mu a M_{k-1}^p.$$

今設 $\mu a M_0^{p-1} < (p-1)^{p-1} p^{-p}$（設 $H = \sup_t |f(t)|$，如果 $\mu < ((p-1)^{-1} \cdot H^{-1})^{p-1} (ap)^{-p}$ 就够了）❶，并設 m 为满足 $1 + \mu a M_0^{p-1} m^p \leqslant m < (p-1)^{-1} p$ 的常数(这样的 m 一定存在)❷。此时

$$M_1 \leqslant M_0(1 + \mu a M_0^{p-1}) \leqslant M_0(1 + \mu a M_0^{p-1} m^p) \leqslant m M_0,$$

并且若 $M_{k-1} \leqslant m M_0$，則

$$M_k \leqslant M_0 + \mu a m^p M_0^p = (1 + \mu a M_0^{p-1} m^p) M_0 \leqslant m M_0.$$

所以对于所有的 k，$M_k \leqslant m M_0$。另一方面由(54.3)

$$|x_{k+1}(t) - x_k(t)| \leqslant \mu \int_0^\infty |\varphi(s)| \, |x_k^p(t-s) - x_{k-1}^p(t-s)| \, ds.$$

所以命
$$D_{k+1} \equiv \sup_t |x_{k+1}(t) - x_k(t)|$$

就有
$$D_{k+1} \leqslant \mu a (p m^{p-1} M_0^{p-1}) D_k < (m p^{-1}(p-1))^{p-1} D_k \text{❸}.$$

因为 $m < (p-1)^{-1} p$，所以

$$x_n(t) = x_0(t) + \sum_{k=0}^{n-1} (x_{k+1}(t) - x_k(t))$$

一致收斂于某一个 $x_*(t)$。因而 $x_*(t)$ 是概周期函数(§52,6°)，而且由(54.3)

---

❶ 因 $|f(t)| \leqslant H$，則 $|x_0(t)| \leqslant aH$[§53，例1]；由此可知 $M_0 \leqslant aH$，从而从 $\mu < ((p-1)^{-1} H^{-1})^{p-1} (ap)^{-p}$ 可导出 $\mu a M_0^{p-1} < (p-1)^{-(p-1)} p^{-p}$。而本文中却是 $\mu a M_0^{p-1} < (p-1)^{(p-1)} p^{-p}$ 恐不妥，以下准此修正而論述，或将

$\mu < ((p-1)^{-1} H^{-1})^{p-1} (ap)^{-p}$ 修改为 $\mu < ((p-1) H^{-1})^{p-1} (ap)^{-p}$ 也可。——譯者注

❷ 由上注❶可知确定 $m > 0$ 使之满足 $1 + m^p (p-1)^{-(p-1)} p^{-p} \leqslant m < (p-1)^{-1} p$ 即可。因

$$1 + m^p (p-1)^{-(p-1)} p^{-p} \leqslant m < (p-1)^{-1} p \rightleftarrows m^p (p-1)^{-(p-1)} p^{-p}$$
$$\leqslant m - 1 < \frac{1}{p-1} \rightleftarrows (p-1)^{-(p-1)} p^{-p} (1+x)^p \leqslant x < \frac{1}{p-1},$$

此处 $x = m-1, 0 < x$，$\rightleftarrows (p-1)^{-p+2} p^{-p} (1+x)^p \leqslant (p-1) x < 1$，又因 $(1+x)^p < 2^p$，于是确定 x 使得 $(p-1)^{-p+2} p^{-p} 2^p \leqslant (p-1) x < 1$ 即可。

由于 $p \geqslant 2$，故只須确定 x 使之 $(p-1)^{-p+2} \leqslant (p-1) x < 1$，也即

$$(p-1)^{-p+1} \leqslant x < \frac{1}{p-1}.$$

当 $p=2$ 时，一开始取 $\mu < \frac{((p-1)^{-1} H^{-1})^{p-1} (ap)^{-p}}{2}$ 即可。——譯者注

❸ 准第一种修正意見，此时不等式右端应为 $(p(p-1))^{-(p-1)} m^{p-1} D_k$，請参考上注❶。而由 $m < (p-1)^{-1} p$，可推出 $(p(p-1))^{-(p-1)} m^{p-1} < 1$。——譯者注

$$x_*(t)=x_0(t)+\mu\int_0^{\infty}\varphi(s)x_*^0(t-s)ds=x_0(t)+\mu\int_{-\infty}^{t}\varphi(t-s)x_*^0(s)ds.$$

这就証明了 $x_*(t)$ 是(54.2)的解。

其次，討論(II)的情况，考慮方程

$$\frac{dx}{dt}=\mu F(t,\ x,\ \mu). \tag{54.4}$$

这里設

$$F(t,\ x,\ \mu)=F^{(0)}(t,\ x)+F^{(1)}(t,\ x)\mu+\cdots,$$

$$F^{(0)}(t,\ x)=P^{(0,0)}(x)+\sum(P^{(0,r)}(x)\cos n_r t+Q^{(0,r)}(x)\sin n_r t),$$

$$u(t,\ y)=\sum\frac{P^{(0,r)}(y)\sin n_r t-Q^{(0,r)}(y)\cos n_r t}{n_r}.$$

如果对方程(54.4)作变数变換

$$x=y+\mu u(t,\ y), \tag{54.5}$$

則可化为

$$\frac{dy}{dt}=\mu Y(y)+\mu^2 Y^*(t,\ y,\ \mu), \tag{54.6}$$

此处

$$Y(y)\equiv\lim_{t\to\infty}\frac{1}{t}\int_0^t F^{(0)}(t,\ y)dt=\lim_{t\to\infty}\frac{1}{t}\int_0^t F(t,\ y,\ 0)dt, \tag{54.7}$$

而且 Y^* 与 F 有同样的結构，并且是关于 t 的概周期函数。

再設 $Y(y^0)=0$(y^0 是常数向量)。随之假定 $P\equiv\dfrac{\partial Y}{\partial y}(y^0)$的特征值实部都不是零。

命 $y=y^0+\mu z$ 并代入(54.6)，經由簡单的計算就可得到

$$\frac{dz}{dt}=\mu Pz+\mu Y^*(t,\ y^0,\ 0)+\mu^2 Z(t,\ z,\ \mu).$$

在此 Z 与 Y^* 有同样的結构。

命 $\tau=\mu t$, $f(t)=Y^*(t,\ y^0,\ 0)$，則上述方程就化为

$$\frac{dz}{d\tau}=Pz+f\left(\frac{\tau}{\mu}\right)+\mu Z\left(\frac{\tau}{\mu},\ z,\ \mu\right). \tag{54.8}$$

因为 P 不具有实部为零的特征值，所以定理 3 是可以应用的。这

就是說可設 $z^{(1)}(\tau)$ 是滿足 $\frac{dz}{d\tau}=Pz+f\left(\frac{\tau}{\mu}\right)$ 的概周期解(它是唯一的一个)。如果对于 $K\geqslant 2$ 决定了

$$\frac{dz}{d\tau}=Pz+f\left(\frac{\tau}{\mu}\right)+\mu Z\left(\frac{\tau}{\mu},\ z^{(k-1)},\ \mu\right)$$

的唯一的概周期解 $z^{(k)}(\tau)$，則当 $k\to\infty$ 时 $z^{(k)}(\tau)$ 就一致收斂于(54.8)的概周期解 $z(\tau)$。

此时

$$x=y^0+\mu z+\mu u(t,\ y^0+\mu z)$$

就是(54.4)的解,并且当 $\mu=0$ 时它就是 y^0。于是我們得到下一定理。

定理 4 設方程(54.1)的 F 满足 §51 的 2°, 3°。再設对于由(54.7)所定义的 $Y(y)$ 有 $Y(y^0)=0$ 成立,而且矩陣 $\frac{\partial Y}{\partial y}(y^0)$ 的特征值的实部都不是零。此时(54.4)对于充分小的 μ 具有关于 μ 連續的概周期解 $x(t,\ \mu)$，且 $x(t,\ 0)=y^0$。

例 2
$$\left.\begin{aligned}\frac{dx}{dt}&=-\mu(g(t)+x\cos t+y\sin t)^2\sin t,\\ \frac{dy}{dt}&=\mu(g(t)+x\cos t+y\sin t)^2\cos t,\end{aligned}\right\}$$

此处 $g(t)$ 是三角多項式。

为了簡单起見,将概周期函数 $h(t)$ 的平均值 $M\{h\}$ 写成 $\overline{h(t)}$。此时(54.7)的 $Y(y^0)=0$ 成为

$$\left.\begin{aligned}\overline{g(t)\sin 2t}\,x_0+2\overline{g(t)\sin^2 t}\,y_0&=-\overline{g^2(t)\sin t},\\ 2\overline{g(t)\cos^2 t}\,x_0+\overline{g(t)\sin 2t}\,y_0&=-\overline{g^2(t)\cos t}.\end{aligned}\right\}\qquad(*)$$

当关于 λ 的二次方程

$$(\overline{g(t)\sin 2t}-\lambda)^2-4\overline{g(t)\sin^2 t}\ \overline{g(t)\cos^2 t}=0\qquad(**)$$

不具有实部为零的根时，上述关于 x_0, y_0 的綫性方程組可以求解，因而可以应用定理 4，并由此得知开头所給的方程对于充分小的 μ，具有滿足 $x(t,\ 0)=x_0$, $y(t,\ 0)=y_0$ 的概周期解 $x(t,\ \mu)$, $y(t,\ \mu)$。

再次,考慮(III)。虽然(III)比(II)是更一般化的情况，但是实施某一变換后,可以把它归結到(II)的情况。

由于假定 $\frac{dx}{dt}=Ax$ 的解都是三角多項式❶。設这一方程的一組基本解为 $\varphi^{(1)}(t), \varphi^{(2)}(t), \cdots, \varphi^{(n)}(t)$，且以它們为列的 n 阶矩陣为 $\Phi(t)$。还有 $\frac{dy}{dt}=-A'y$ 的解也都是三角多項式。設它的一組基本解是 $\psi^{(1)}(t), \psi^{(2)}(t), \cdots, \psi^{(n)}(t)$，且以它們为列的 n 阶矩陣为 $\Psi(t)$。由定理 2，方程

$$\frac{dx}{dt}=Ax+f \tag{54.9}$$

具有概周期解的充分而且必要的条件是

$$\lim_{t\to\infty}\frac{1}{t}\int_0^t \Psi'(s)f(s)ds=0. \tag{54.10}$$

今設这一事实成立。

設(54.9)的一个解(它是三角多項式)为 $x^*(t)$，則(54.9)的通解 $x(t)$ 可以写成

$$x(t)=x^*(t)+\Phi(t)c, \tag{54.11}$$

其中 c 是 n 維常数向量。

在此把 c 看作 t 的函数，試决定一个使得(54.11)满足方程(51.1)

$$\frac{dx}{dt}=Ax+f+\mu F$$

的 $c(t)$(常数变易法)：

如果将 $x=x^*(t)+\Phi(t)c(t)$ 代入(51.1)，就有

$$\Phi(t)\frac{dc}{dt}=\mu F(t, x^*+\Phi c, \mu).$$

而

$$\det\Phi(t)=(\det\Phi(0))\exp(t\,\mathrm{tr}(A))❷,$$

但是由于 $\mathrm{tr}(A)$ 等于 A 的特征値的和，所以它是純虚数，又因为

❶ 参考第5章 § 40 的(40.4)可知。——譯者注

❷ 参考第4章 § 36 的(36.2)。——譯者注

A 的元素是实数，所以 $\operatorname{tr}(A)=0$. 因此 $\det\Phi(t)=\text{const}$. 从而 $\Phi^{-1}(t)$的元素是 t 的三角多项式❶。而且决定 $c(t)$的方程可以写成

$$\frac{dc}{dt}=\mu\Phi^{-1}(t)F(t,\ x^*+\Phi c,\ \mu)=\mu G(t,\ c,\ \mu). \quad (54.12)$$

上式右端的 G 满足 §51 的条件 2°, 3°,所以这一方程就是(54.4)的形式。于是,若对于

$$P(c)\equiv\lim_{t\to\infty}\frac{1}{t}\int_0^t G(s,\ c,\ 0)ds \quad (54.13)$$

有性质

$$P(c^0)=0,\ \frac{\partial P}{\partial c}(c^0)\text{不具有实部为零的特征值} \quad (54.14)$$

成立，则定理 4 是可以应用的。因此 (54.12) 对于充分小的 μ 具有一个使得 $c(t,\ 0)=c^0$ 的概周期解 $c=c(t,\ \mu)$. 从而(51.1)具有概周期解 $x=x^*+\Phi(t)c(t,\ \mu)$. 以上所述証明了以下定理。

定理 5 假設方程(51.1)的 f, F 满足 §51 的条件 1°,2°,3°,而且 A 的特征值都是純虚数，并且取得适当的非异矩陣 P 后 $P^{-1}AP$ 就是对角矩陣。如果 (54.10) 与 (54.14) 成立,則 (51.1) 对于充分小的 μ, 具有一个关于 μ 連續的概周期解 $x(t,\mu)=\Phi(t)c(t,\mu)+x^*(t)$,使得当 $\mu=0$ 时,$x(t,\ 0)=\Phi(t)c^0+x^*(t)$.

例 3 $\dfrac{d^2x}{dt^2}+x=f(t)+\mu x^2$, $f(t)$是三角多項式。

設 $f(t)=a_0+\sum_{r=1}^{n}(a_r\cos\nu_r t+b_r\sin\nu_r t)$. 又令 $\mu=0$ 的方程滿足具有概周期解的条件: $\nu_r\neq 1(r=1,\ 2,\ \cdots,\ p)$. $\mu=0$ 的方程的通解就是 $g(t)+c_1\cos t+c_2\sin t$($g(t)$已見于 §53 的例 2 中)。在此应用常数变易法就得到

$$\frac{dc_1}{dt}=-\mu(g(t)+c_1\cos t+c_2\sin t)^2\sin t,$$

$$\frac{dc_2}{dt}=\mu(g(t)+c_1\cos t+c_2\sin t)^2\cos t.$$

这就是在 §54 的例 2 中以 c_1, c_2 代换 x, y 所得到的結果。当 §54 的例 2 中

❶ 由假設, $\det\Phi(t)\neq 0$[参考第 4 章 §36], 而今 $\det\Phi(t)=$常数, 于是 $\det\Phi(t)=$常数 $\neq 0$, 从而可知 $\Phi^{-1}(t)$存在,且其元素为 t 之三角多项式。——譯者注

带(**)号的方程(关于 λ 的)沒有实部为零的根时，可以設带(*)号的綫性方程組的解为 c_1^0, c_2^0. 此时原方程对于充分小的 μ, 具有概周期解 $x(t, \mu)$, 而且 $x(t, 0)=g(t)+c_1^0\cos t+c_2^0\sin t$.

§55 非綫性方程(一般情况)

前节中我們对矩陣 A 設置了特殊的条件，但在本节中我們要考慮一般的情况。在此，我們假設(53.9)中的 $A_p(1\leqslant p\leqslant m)$ 都是一阶的。即可选得非异矩陣 P(它的元素一般是复数)，使得

$$P^{-1}AP=A_1\dotplus\cdots\dotplus A_m\dotplus B_1\dotplus\cdots\dotplus B_r. \qquad (55.1)$$

此处 $A_i=(\lambda_i)$, $\mathrm{Re}\lambda_i=0$, 而 B_i 取如下形式:

$$\begin{pmatrix} \mu_i & & & 0 \\ 1 & \mu_i & & \\ & \ddots & \ddots & \\ 0 & & 1 & \mu_i \end{pmatrix} \text{或}(\mu_i),\ \mathrm{Re}\mu_i\neq 0.$$

在此假定下我們来考慮方程(51.1)，就是在本节中利用变换把(51.1)化成另外形式，在下一节中用逐次逼近法求变换后的方程的概周期解。

为了作变换，就把(55.1)表为实数形式。这就是选得适当的实非异矩陣 Q 之后，可以把 $Q^{-1}AQ$ 表为如下的形式:

$$Q^{-1}AQ=A_1^0\dotplus\cdots\dotplus A_j^0\dotplus A^0\dotplus B_1^0\dotplus\cdots\dotplus B_r^0. \qquad (55.2)$$

此处 A^0 是 l 阶零矩陣，$A_i^0=\begin{pmatrix} 0 & \beta_i \\ -\beta_i & 0 \end{pmatrix}$，$\beta_i$ 是不等于零的实数，B_i^0 是

$$\begin{pmatrix} T_i & & & 0 \\ E_2 & T_i & & \\ & \ddots & \ddots & \\ 0 & & E_2 & T_i \end{pmatrix} \text{或} \begin{pmatrix} \gamma_i & & & 0 \\ 1 & \gamma_i & & \\ & \ddots & \ddots & \\ 0 & & 1 & \gamma_i \end{pmatrix}$$

或 (T_i) 或 (γ_i) 的形式。此处

$$T_i=\begin{pmatrix}\gamma_i & \delta_i\\ -\delta_i & \gamma_i\end{pmatrix},\ E_2=\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}$$

而且 γ_i, δ_i 是 $\neq 0$ 的实数。命

$$m=2j+l,\quad B=B_1^0\dot{+}\cdots\dot{+}B_r^0.$$

再設 §53 中所述 $\frac{dx}{dt}=Ax$ 的 m 个綫性无关的概周期解为 $\varphi^{(1)},\cdots,\varphi^{(m)}$, 而

$$\frac{dy}{dt}=-A'y$$

的 m 个綫性无关的概周期解为 $\psi^{(1)},\cdots,\psi^{(m)}$. 并且命以 $\varphi^{(i)}$ 为第 i 列的 (n,m) 矩陣为 Φ, 以 $\psi^{(i)}$ 为第 i 列的 (n,m) 矩陣为 Ψ. 这种 $\varphi^{(i)}$, $\psi^{(i)}$ 的选法有很多种,适当地选择它們时可以有

$$\Psi'\Phi=E_m\quad (E_m \text{是} m \text{阶单位矩陣}). \tag{55.3}$$

[任意选取上述的 $\varphi^{(i)}$, $\psi^{(j)}(i,j=1,2,\cdots,m)$. 以前已注意到 $\Psi'\Phi$ 是常数矩陣❶。若 $\det(\Psi'\Phi)=0$, 則有满足 $\gamma'\Psi'\Phi=0$ 的 m 維纵向量 $\gamma\neq 0$ 存在。如果命 $\psi=\Psi\gamma$, 則 $\Phi'\psi=\Phi'\Psi\gamma=(\gamma'\Psi'\Phi)'=0$, 所以,由 §53 的定理 2,

$$\frac{dy}{dt}=-A'y+\psi$$

具有概周期解 y^0. 若命 $z=t\psi-y^0$, 則易于証明 z 是

$$\frac{dz}{dt}=-A'z$$

的解。这是与(55.1)的假定矛盾的❷。所以应有 $\det(\Psi'\Phi)\neq 0$. 命 $K=(\Psi'\Phi)^{-1}$, $\overline{\Psi}=\Psi K'$, 則 $\overline{\Psi}$ 的各列就是

$$\frac{dy}{dt}=-A'y$$

的綫性无关的概周期解。而 $\overline{\Psi}'\Phi=K\Psi'\Phi=E_m$.]

今設 Ψ, Φ 满足(55.3)。其次自 Q'^{-1} (Q 是(55.2)左端的矩

❶ 参见第4章 §37。——譯者注

❷ 注意 ψ, y^0 俱应为三角多項式(見 §53)。——譯者注

陣）中將其第一列，第二列，…，第 m 列去掉而命所得到的 $(n, n-m)$ 矩陣为 Q_2，則

$$A'Q_2 = Q_2 B' \text{ [1]}. \tag{55.4}$$

命 $Y = Q_2 e^{-B't}$，就有

$$\frac{dY}{dt} = Q_2(-B')e^{-B't} = -A'Q_2 e^{-B't} = -A'Y. \tag{55.5}$$

把 Ψ 的 m 个列与 Y 的 $n-m$ 个列結合起来就是

$$\frac{dy}{dt} = -A'y$$

的独立的一組解，所以，以 Ψ 的第 i 列为第 i 列，以 Y 的第 j 列为第 $m+j$ 列的 n 阶矩陣 (ΨY) 的行列式不是零。

如果以

$$R' \equiv (\Psi Q_2), \quad S' \equiv (\Psi Y), \quad T = E_m \dotplus e^{Bt} \tag{55.6}$$

定义 $R = R(t)$，$S = S(t)$，$T = T(t)$，則 $TS = R$，$\det T(t) = e^{(\operatorname{tr} B)t}$，$\det S(t) = (\det S(0))e^{-(\operatorname{tr} A)t}$。并且因为 $\operatorname{tr} A = \operatorname{tr} B$（由(55.2)可知），$R(0) = S(0) \neq 0$，所以

$$\det R(t) = \det R(0) \neq 0.$$

从而 R^{-1} 的元素是 t 的三角多項式。

設由 R^{-1} 的最初 m 个列所成 (n, m) 矩陣为 F_1，所余 $n-m$ 个列所成 $(n, n-m)$ 矩陣为 F_2，則有

$$R^{-1} = (F_1 F_2).$$

这时由(55.3)就可証明

$$F_1 = \Phi, \tag{55.7}$$

---

[1] 因 $Q^{-1}AQ = A_1^0 \dotplus \cdots \dotplus A_j^0 \dotplus A^0 \dotplus B$，故

$$Q'A'(Q')^{-1} = (A_1^0)' \dotplus \cdots \dotplus (A_j^0)' \dotplus A^0 \dotplus B',$$

两端右乘 $(Q')^{-1}$，得

$$A'(Q')^{-1} = (Q')^{-1}((A_1^0)' \dotplus \cdots \dotplus (A_j^0)' \dotplus A^0 \dotplus B'),$$

等式两端矩陣各自去掉前 m 列即得

$$A'Q_2 = Q_2 B'. \text{——譯者注}$$

$$\Phi\Psi' + F_2 Q_2' = E_n \quad (E_n \text{ 是 } n \text{ 阶单位矩陣})。 \tag{55.8}$$

[如果知道了(55.7)，則(55.8)可以直接由 $R^{-1}R = E_n$ 导出。以下証明(55.7)。由

$$\begin{pmatrix} \Psi' \\ Q_2' \end{pmatrix}(F_1\ F_2) = \begin{pmatrix} E_m & 0 \\ 0 & E_{n-m} \end{pmatrix}$$

就得到

$$\Psi' F_1 = E_m,\quad \Psi' F_2 = 0,\quad Q_2' F_1 = 0,\quad Q_2' F_2 = E_{n-m}.$$

另一方面，由

$$\frac{d}{dt}(\Psi' F_1) = 0$$

就得到

$$\Psi'\left(-AF_1 + \frac{d}{dt}F_1\right) = 0.$$

还有

$$Q_2'\left(-AF_1 + \frac{d}{dt}F_1\right) = -BQ_2'F_1 + \frac{d}{dt}(Q_2'F_1) = 0.$$

所以

$$\frac{d}{dt}F_1 = AF_1.$$

从而有一个 m 阶常数矩陣 K 使得 $F_1 = \Phi K$。因而

$$K = E_m K = \Psi'\Phi K = \Psi' F_1 = E_m,$$

由此就得到

$$F_1 = \Phi.]$$

有了以上的准备，我們对于方程(51.1)

$$\frac{dx}{dt} = Ax + f(t) + \mu F(t,\ x,\ \mu)$$

作如下变换：

$$\begin{pmatrix} \xi \\ \eta \end{pmatrix} = Rx:\ \begin{aligned} \xi &= \Psi' x, \\ \eta &= Q_2' x. \end{aligned} \tag{55.9}$$

此时如果注意到(55.4)，以及 F_2 的元素是 t 的三角多項式，$x = \Phi\xi + F_2\eta$，就可以知道关于 ξ，η 的方程为

$$\left.\begin{aligned}\frac{d\xi}{dt}&=g(t)+\mu G(t,\ \xi,\ \eta,\ \mu),\\ \frac{d\eta}{dt}&=B\eta+h(t)+\mu H(t,\ \xi,\ \eta,\ \mu).\end{aligned}\right\}\qquad(55.10)$$

此处 $g(t)\equiv\Psi'(t)f(t)$ 与 $h(t)\equiv Q_2'f(t)$ 都是三角多项式，并且

$$G(t,\ \xi,\ \eta,\ \mu)\equiv\Psi'(t)F(t,\ \Phi\xi+F_2\eta,\ \mu)$$

与

$$H(t,\ \xi,\ \eta,\ \mu)\equiv Q_2'F(t,\ \Phi\xi+F_2\eta,\ \mu)$$

具有与 §51 的 2°, 3° 中所提及的 F 相同的結构。

在(55.10)中，命 $\mu=0$ 所得到的方程

$$\left.\begin{aligned}\frac{d\xi}{dt}&=g(t),\\ \frac{d\eta}{dt}&=B\eta+h(t)\end{aligned}\right\}\qquad(55.11)$$

就是对应于

$$\frac{dx}{dt}=Ax+f$$

的，如果 $x^*(t)$ 是 $\frac{dx}{dt}=Ax+f$ 的一个概周期解，则

$$\xi^{(0)}(t)=c+\Psi'(t)x^*(t)\quad(c\text{ 是 }m\text{ 維常数向量})\qquad(55.12)$$

就是(55.11)的第一式的解。并且 $\eta^{(0)}(t)=Q_2'x^*(t)$ 就是(55.11)的第二式的唯一的概周期解(因为 B 的特征值的实部不是零)。

如果使用这样的 $\xi^{(0)}(t)$, $\eta^{(0)}(t)$ 来确定

$$P(c)=\lim_{t\to\infty}\frac{1}{t}\int_0^t G(t,\ \xi^{(0)}(t),\ \eta^{(0)}(t),\ 0)\,dt,\qquad(55.13)$$

$$u(t,\ c)=\int_0^t G(t,\ \xi^{(0)}(t),\ \eta^{(0)}(t),\ 0)\,dt-tP(c),\qquad(55.14)$$

则 P 与 u 的分量就是 c 的分量 $c_1,\ c_2,\ \cdots,\ c_m$ 的多項式，而 u 是 t 的三角多項式。此处要注意到如下的关系：

$$G(t,\ \xi^{(0)},\ \eta^{(0)},\ 0)=\Psi'(t)F(t,\ \Phi c+x^*,\ 0).\qquad(55.15)$$

[这是因为由 $\xi^{(0)}=c+\Psi'x^*$, $\eta^{(0)}=Q_2'x^*$ 及(55.8)，可以得到

$$\Phi\xi^{(0)}+F_2\eta^{(0)}-\Phi c+(\Phi\Psi'+F_2Q_2')x^*=\Phi c+x^*$$

的緣故。]

以上是把 c 作为常数来考虑的，以下把它作为 t 的函数来考察。今利用

$$\xi=c+\Psi'x^*+\mu u,\quad \eta=\eta^{(0)}+\mu z \tag{55.16}$$

作为我們所要考虑从 ξ, η 到 c, z 的变换。

由

$$\frac{d\xi}{dt}=\frac{dc}{dt}+g+\mu\left(u_t+\frac{\partial u}{\partial c}\frac{dc}{dt}\right),\quad u_t=G(t,\xi^{(0)},\eta^{(0)},0)-P(c)$$

及(55.10)的第一式，就得到

$$\left(E_m+\mu\frac{\partial u}{\partial c}\right)\frac{dc}{dt}=\mu P(c)+\mu\{G(t,\ c+\Psi'x^*+\mu u,\eta^{(0)}+\mu z,\ \mu)$$
$$-G(t,\ c+\Psi'x^*,\ \eta^{(0)},\ 0)\}.$$

並且由

$$\frac{d\eta}{dt}=B\eta^{(0)}+h(t)+\mu\frac{dz}{dt}$$

与(55.10)的第二式，就得到

$$\frac{dz}{dt}=Bz+H(t,\ c+\Psi'x^*+\mu u,\ \eta^{(0)}+\mu z,\ \mu).$$

因为当 μ 充分小时逆矩陣

$$\left(E_m+\mu\frac{\partial u}{\partial c}\right)^{-1}$$

是存在的，

$$\left[\left(E_m+\mu\frac{\partial u}{\partial c}\right)^{-1}=E_m-\mu\left(\frac{\partial u}{\partial c}\right)+\mu^2\left(\frac{\partial u}{\partial c}\right)^2-\cdots\right]^{❶},$$

所以关于 c, z 的方程就是

$$\left.\begin{aligned}\frac{dc}{dt}&=\mu P(c)+\mu^2Q(t,\ c,\ z,\ \mu),\\ \frac{dz}{dt}&=Bz+Z^0(t,\ c)+\mu Z(t,\ c,\ z,\ \mu).\end{aligned}\right\} \tag{55.17}$$

❶ 此等式右端的"－"号，原书均誤为"＋"号。——譯者注

此处 $Z^0(t, c)=H(t, c+\Psi' x^*, \gamma^{(0)}, 0)$，而且它是关于 t 的三角多项式，它的系数是 c 的多项式，并且 Q 与 Z 具有与(51.1)的 F 相同的結构。这就是說

$$\mu^2 Q(t, c, z, \mu)=\sum_{p=2}^{m} Q^{(p)}(t, c, z)\mu^p \text{❶},$$

$$\mu Z(t, c, z, \mu)=\sum_{p=1}^{\infty} Z^{(p)}(t, c, z)\mu^p,$$

它們的右端对于充分小的 μ 是收斂的冪級数，$Q^{(p)}$, $Z^{(p)}$ 是 t 的三角多项式，它的系数是 c, z 的多项式。

于是設

$$P(c^0)=0, \text{ 矩陣 } C\equiv\frac{\partial P}{\partial c}(c^0) \text{ 的特征值的实部} \neq 0. \quad (55.18)$$

此时命 $c=c^0+\mu\gamma$，(55.17)可以写成

$$\left.\begin{aligned}\frac{d\gamma}{dt}&=\mu C\gamma \text{❷}+\mu\bar{Q}(t, z)+\mu^2 Q^*(t, \gamma, z, \mu),\\ \frac{dz}{dt}&=Bz+v(t)+\mu Z^*(t, \gamma, z, \mu).\end{aligned}\right\} \quad (55.19)$$

此处 $\bar{Q}(t, z)=Q(t, c^0, z, 0)$, $v(t)=Z^0(t, c^0)$，而且 Q^* 与 Z^* 具有与(51.1)的 F 相同的結构。

終于，对方程(51.1)施行变換(55.9)，(55.16)以及 $c=c^0+\mu\gamma$ 之后得到了(55.19)。

§56 逐次逼近法

应用逐次逼近法我們来求方程(55.19)的概周期解。首先，考慮作为第一近似的方程

---

❶ 此处 $\sum_{p=2}^{m}$ 疑是 $\sum_{p=2}^{\infty}$。——譯者注

❷ 注意 $P(c^0)=0$, $c=c^0+\mu\gamma$，以及 P 的分量为 c 的分量 $c_1, \cdots, c_m$ 的多项式。——譯者注

$$\frac{d\gamma}{dt}=\mu C\gamma+\mu\bar{Q}(t, z), \quad \frac{dz}{dt}=Bz+v(t). \qquad (56.1)$$

由于 B 的特征值的实部不是零，上面的第二式具有唯一的一个概周期解 $z^{(1)}$. 用它代替第一式右端的 z 而得到的方程，由于 C 沒有实部为零的特征值，故仍有唯一的一个概周期解 $\gamma^{(1)}$.

今設已确定概周期的第 $(p-1)$ 近似 $\gamma^{(p-1)}$, $z^{(p-1)}$. 于此我們考虑方程

$$\left.\begin{aligned}\frac{d\gamma}{dt}&=\mu C\gamma+\mu\bar{Q}(t, z)+\mu^2 Q^*(t, \gamma^{(p-1)}, z^{(p-1)}, \mu),\\ \frac{dz}{dt}&=Bz+v(t)+\mu Z^*(t, \gamma^{(p-1)}, z^{(p-1)}, \mu).\end{aligned}\right\}(56.2)$$

上面的第二个方程有唯一的一个概周期解。設它是 $z^{(p)}$. 以 $z^{(p)}$ 代替第一式右端的 z 而得到的方程仍有唯一的一个概周期解。設它为 $\gamma^{(p)}$.

我們来証明这样确定的叙列 $\{\gamma^{(p)}\}$, $\{z^{(p)}\}$ 对于充分小的 μ 是一致收斂的，并且它們的极限 γ^*, z^* 就是(55.19)的概周期解。

給定正数 h, 幷設用下面的不等式

$$|\gamma_i-\gamma_i^{(1)}(t)|\leqslant h, |z_r-z_r^{(1)}(t)|\leqslant h \quad (1\leqslant r\leqslant n-m, 1\leqslant i\leqslant m)(56.3)$$

所确定的閉域为 Δ. 适当地选取正数 M_1, M_2, M_3, M_4, M_5, M_6 使得下列各式

$$\left.\begin{aligned}&|Z_r^*|\leqslant M_1, \ |\bar{Q}_i|\leqslant M_2, \ |\bar{Q}_i^*|\leqslant M_3,\\ &|Z_r^*(t, \gamma', z', \mu)-Z_r^*(t, \gamma'', z'', \mu)|\\ &\quad\leqslant M_4\left(\sum_{i=1}^{m}|\gamma_i'-\gamma_i''|+\sum_{r=1}^{k}|z_r'-z_r''|\right)❶,\\ &|\bar{Q}_i(t, z')-\bar{Q}_i(t, z'')|\leqslant M_5\sum_{r=1}^{k}|z_r'-z_r''|,\\ &|Q_i^*(t, \gamma', z', \mu)-Q_i^*(t, \gamma'', z'', \mu)|\\ &\quad\leqslant M_6\left(\sum_{i=1}^{m}|\gamma_i'-\gamma_i''|+\sum_{r=1}^{k}|z_r'-z_r''|\right)\end{aligned}\right\}(56.4)$$

❶ 此处 $k=n-m$，下同。——譯者注

在 Δ 成立。

首先来証明如果把 μ 取得充分小，则当 $(\gamma^{(p-1)}(t),\ z^{(p-1)}(t))$ 属于 Δ 时，$(\gamma^{(p)}(t),\ z^{(p)}(t))$ 也必属于 Δ。实际上，对于

$$\frac{d}{dt}(z^{(p)}-z^{(1)})=B(z^{(p)}-z^{(1)})+\mu Z^*(t,\ \gamma^{(p-1)},\ z^{(p-1)},\ \mu)$$

应用 §53 定理 1 就得到

$|z_r^{(p)}-z_r^{(1)}|<\mu M_1\beta_1$ （β_1 是只依赖于 B 的一个正常数）。 (56.5)

由此式与 (56.4) 可以得到

$$|\overline{Q}_i(t,\ z^{(p)})-\overline{Q}_i(t,\ z^{(1)})|+\mu|Q_i^*(t,\ \gamma^{(p-1)},\ z^{(p-1)},\ \mu)|$$
$$\leqslant\mu(kM_1M_5\beta_1+M_3). \tag{56.6}$$

再在

$$\frac{d}{dt}(\gamma^{(p)}-\gamma^{(1)})=\mu C(\gamma^{(p)}-\gamma^{(1)})+\mu(\overline{Q}(t,\ z^{(p)})-\overline{Q}(t,\ z^{(1)}))$$
$$+\mu^2Q^*(t,\ \gamma^{(p-1)},\ z^{(p-1)},\ \mu)$$

中以 μt 代 t，而对所得到的方程应用 §53 定理 1，并注意到 (56.6)，就得到

$$|\gamma_i^{(p)}-\gamma_i^{(1)}|<\mu(kM_1M_5\beta_1+M_3)\beta_2$$

（β_2 是只依赖于 C 的一个正常数）。 (56.7)

由此就可以知道，当 μ 充分小时 $(\gamma^{(p)}(t),\ z^{(p)}(t))$ 是属于 Δ 的。

再命

$$a_p\equiv\sup_{r,i,t}(|z_r^{(p)}-z_r^{(p-1)}|,\ |\gamma_i^{(p)}-\gamma_i^{(p-1)}|).$$

此处右端的 sup 是于 $1\leqslant r\leqslant k$，$1\leqslant i\leqslant m$，$-\infty<t<\infty$ 内考虑的。于是有

$$|Z_r^*(t,\ \gamma^{(p)},\ z^{(p)},\ \mu)-Z_r^*(t,\ \gamma^{(p-1)},\ z^{(p-1)},\ \mu)|$$
$$\leqslant M_4(m+k)a_p=nM_4a_p.$$

并且由方程

$$\frac{d}{dt}(z^{(p+1)}-z^{(p)})=B(z^{(p+1)}-z^{(p)})$$
$$+\mu(Z^*(t,\ \gamma^{(p)},\ z^{(p)},\ \mu)-Z^*(t,\ \gamma^{(p-1)},\ z^{(p-1)},\ \mu))$$

就得到

$$|z_r^{(p+1)}-z_r^{(p)}|<\mu n M_4\beta_1 a_p \text{❶}. \tag{56.8}$$

所以

$$|\bar{Q}_i(t,\ z^{(p+1)})-\bar{Q}_i(t,\ z^{(p)})|+\mu|Q^*(t,\ \gamma^{(p)},\ z^{(p)},\ \mu)$$
$$-Q^*(t,\ \gamma^{(p-1)},\ z^{(p-1)},\ \mu)|<\mu n(\beta_1 k M_4 M_5+M_6)a_p.$$

与上述 $|\gamma_i^{(p)}-\gamma_i^{(1)}|$ 的估价同样，由于

$$\frac{d}{dt}(\gamma^{(p+1)}-\gamma^{(p)})=\mu C(\gamma^{(p+1)}-\gamma^{(p)})+\mu(\bar{Q}(t,\ z^{(p+1)})-\bar{Q}(t,z^{(p)}))$$
$$+\mu^2(Q^*(t,\ \gamma^{(p)},\ z^{(p)},\ \mu)-Q^*(t,\ \gamma^{(p-1)},\ z^{(p-1)},\ \mu)),$$

有

$$|\gamma_i^{(p+1)}-\gamma_i^{(p)}|<\mu n\beta_2(\beta_1 k M_4 M_5+M_6)a_p. \tag{56.9}$$

由(56.8)，(56.9)可以知道，如果把 μ 取得充分小，就有一个与 p 无关的正数 $\theta<1$❷，它使得

$$a_{p+1}\leqslant\theta a_p.$$

于是証明了 $\gamma^{(p)}(t)$ 向着某一个 $\gamma^*(t)$ 而 $z^{(p)}(t)$ 向着某一个 $z^*(t)$ 一致收斂。$(\gamma^*(t),\ z^*(t))$ 显然属于 Δ.

其次，我們要証明 $\gamma^*(t)$, $z^*(t)$ 实际上就是(55.19)的解。为了这一目的我們考虑綫性方程

$$\left.\begin{aligned}\frac{d\gamma}{dt}&=\mu C\gamma+\mu\bar{Q}(t,\ z^*)+\mu^2 Q^*(t,\ \gamma^*,\ z^*,\ \mu),\\ \frac{dz}{dt}&=Bz+v(t)+\mu Z^*(t,\ \gamma^*,\ z^*,\ \mu).\end{aligned}\right\} \tag{56.10}$$

由§53的定理1，这一方程有唯一的一个概周期解。命它为 $\bar{\gamma}(t)$，$\bar{z}(t)$. 令

$$\bar{a}_p=\sup_{r,i,t}(|z_r^{(p)}-z_r^*|,\ |\gamma_i^{(p)}-\gamma_i^*|)$$

---

❶ (56.8)中 β_1 与(56.5)中 β_1 同是一个只与 B 有关而与 p 无关，理由見§53定理1所說的"a 与 $f(t)$ 无关"。——譯者注

❷ 尚須考虑 $a_{p+1}=\sup\limits_{r,i,t}(|z_r^{(p+1)}-z_r^{(p)}|,\ |\gamma_i^{(p+1)}-\gamma_i^{(p)}|)$. ——譯者注

就有

$$|Z_r^*(t, \gamma^*, z^*, \mu) - Z_r^*(t, \gamma^{(p-1)}, z^{(p-1)}, \mu)| \leqslant n M_4 \bar{a}_{p-1}.$$

由(56.2)与(56.10)有

$$\frac{d}{dt}(\bar{\gamma} - \gamma^{(p)}) = \mu C(\bar{\gamma} - \gamma^{(p)}) + \mu(\bar{Q}(t, z^*) - Q(t, z^{(p)}))$$
$$+ \mu^2(Q^*(t, \gamma^*, z^*, \mu) - Q^*(t, \gamma^{(p-1)}, z^{(p-1)}, \mu))$$

及

$$\frac{d}{dt}(\bar{z} - z^{(p)}) = B(\bar{z} - z^{(p)}) + \mu(Z^*(t, \gamma^*, z^*, \mu)$$
$$- Z^*(t, \gamma^{(p-1)}, z^{(p-1)}, \mu)).$$

由上面的第二个关系式就得到

$$|\bar{z}_r - z_r^{(p)}| < \mu n \beta_1 M_4 \bar{a}_{p-1}.$$

并且由上面的第一个关系式就得到

$$|\bar{\gamma}_i - \gamma_i^{(p)}| < k \beta_2 M_5 \bar{a}_p + \mu n M_6 \bar{a}_{p-1} \beta_2 ❶.$$

由于当 $p \to \infty$ 时 $\bar{a}_p \to 0$，所以 $\bar{\gamma} = \lim \gamma^{(p)} = \gamma^*$，$\bar{z} = \lim z^{(p)} = z^*$。于是可以知道 γ^*, z^* 是(55.19)的解。

再次，由(56.5)，(56.7)可以知道，$\gamma^*(t)$，$z^*(t)$满足

$$|\gamma_i^*(t) - \gamma_i^{(1)}(t)| \leqslant \mu(k M_1 M_5 \beta_1 + M_3)\beta_2,$$
$$|z_r^*(t) - z_r^{(1)}(t)| \leqslant \mu M_1 \beta_1.$$

这就是說(55.19)的概周期解与(56.1)的概周期解的差，如果把 μ 取得充分小，就可以任意地小。下面証明(55.19)滿足这样条件的概周期解是唯一的。

設 $\gamma^{**}(t)$，$z^{**}(t)$是(55.19)的概周期解，并且对于充分小的 μ

$$|\gamma_i^{**} - \gamma_i^*| < \varepsilon, \quad |z_r^{**} - z_r^*| < \varepsilon,$$

此处 ε 是比 1 小的正数。

由

---

❶ 原书此处遗漏"β_2"。——譯者注

$$\frac{d}{dt}(\gamma^{**}-\gamma^{*})=\mu C(\gamma^{**}-\gamma^{*})+\mu(\overline{Q}(t, z^{**})-\overline{Q}(t, z^{*}))$$
$$+\mu^{2}(Q^{*}(t, \gamma^{**}, z^{**}, \mu)-Q^{*}(t, \gamma^{*}, z^{*}, \mu))$$

及

$$\frac{d}{dt}(z^{**}-z^{*})=B(z^{**}-z^{*})+\mu(Z^{*}(t, \gamma^{**}, z^{**}, \mu)$$
$$-Z^{*}(t, \gamma^{*}, z^{*}\mu))$$

就得到

$$|z_r^{**}-z_r^{*}|<\mu n M_4\beta_1\varepsilon,$$
$$|\gamma_i^{**}-\gamma_i^{*}|<\mu n\beta_2(kM_4M_5\beta_1+M_6)\varepsilon.$$

取 $\mu<\mu_0$ 使得 $\mu nM_4\beta_1<\varepsilon$, $\mu n\beta_2(kM_4M_5\beta_1+M_6)<\varepsilon$，于是

$$|z_r^{**}-z_r^{*}|<\varepsilon^2, \qquad |\gamma_i^{**}-\gamma_i^{*}|<\varepsilon^2.$$

同样地进行下去，就得到

$$|z_r^{**}-z_r^{*}|<\varepsilon^l, \qquad |\gamma_i^{**}-\gamma_i^{*}|<\varepsilon^l.$$

取　$l\to\infty$

$$z^{**}=z^{*}, \qquad \gamma^{**}=\gamma^{*}.$$

于是这就証明了满足前述条件的概周期解是唯一的。

对于在这里得到的(55.19)的概周期解 $\gamma^{*}(t)$, $z^{*}(t)$ 作

$$\xi(t)=c^0+\Psi'(t)x^{*}(t)+\mu(\gamma^{*}(t)+u(t, c^0+\mu\gamma^{*})),$$
$$\eta(t)=\eta^{(0)}(t)+\mu z^{*}(t),$$

則它卽是(55.10)的概周期解。

綜括以上所述，我們得到如下的定理。

定理 6　对于方程

$$\frac{dx}{dt}=Ax+f(t)+\mu F(t, x, \mu),$$

設条件

1° f, F 滿足 § 51 的 1°, 2°, 3°。

2° A 是(55.1)的形式。

3° Φ, Ψ 是 § 55 中所定义的矩陣 $(\Psi'\Phi=E_m)$,

$$\lim_{t\to\infty}\frac{1}{t}\int_0^t \Psi'(s)f(s)ds=0.$$

4° x^*是$\frac{dx}{dt}=Ax+f$ 的一个概周期解。

$$P(c^0)=\lim_{t\to\infty}\frac{1}{t}\int_0^t \Psi'(s)F(s, \Phi(s)c^0+x^*(s), 0)ds=0,$$

而且 m 阶矩陣 $\frac{\partial P}{\partial c}(c^0)$ 的特征值的实部不是零。

此时上面的方程,对于充分小的 μ,具有唯一的一个关于 μ 連續的概周期解 $x(t, \mu)$,它满足

$$x(t, 0)=\Phi(t)c^0+x^*(t).$$

§ 57 概周期解的計算法

我們已經用定理 6 証明了概周期解的存在，現在来叙述其計算法。如果只是为了求这样的概周期解，那末，用不着完全按照 § 55, § 56 所述方法来做。实际上，把所給的方程 (51.1) 化为 (55.17) 是相当費事的。在这里我們先叙述把方程变化到 (55.17) 的形式的簡单方法,其次再求其近似解。

假設方程 (51.1) 中的 f, F, A 滿足定理 6 的条件 1°, 2°。这时选取适当的非异矩陣 V，就可以把 $V^{-1}AV$ 化为下面的直和的形式:

$$V^{-1}AV=A^0\dot{+}B. \tag{57.1}$$

此处 A^0 是 m 阶矩陣,它的特征值的实部都是零, B 是 $n-m$ 阶矩陣,它的特征值的实部都不是零。

設 ξ, η 分别是 m 維, $n-m$ 維的向量,如果施行变换

$$x=V\begin{pmatrix}\xi\\ \eta\end{pmatrix},$$

則設 $V^{-1}f=\begin{pmatrix}p\\ q\end{pmatrix}$, $V^{-1}F=\begin{pmatrix}K\\ L\end{pmatrix}$, (51.1) 就化为

$$\left.\begin{aligned}\frac{d\xi}{dt}&=A^0\xi+p(t)+\mu K(t,\ \xi,\ \eta,\ \mu),\\ \frac{d\eta}{dt}&=B\eta+q(t)+\mu L(t,\ \xi,\ \eta,\ \mu).\end{aligned}\right\}\tag{57.2}$$

設 ξ^0 是在(57.2)的第一式中命 $\mu=0$ 所得到的綫性方程

$$\frac{d\xi}{dt}=A^0\xi+p(t)\tag{57.3}$$

的一个概周期解。$\left[\frac{dx}{dt}=Ax\right.$❶ $+f$ 具有概周期解 x^0。由 $V^{-1}x^0$ 的最初 m 个分量所成的 m 維向量当做 ξ^0。$\left.\right]$ 設 $\varphi_1^0(t)$, …, $\varphi_m^0(t)$ 是 $\frac{d\xi}{dt}=A^0\xi$ 的一組綫性无关的解(它們都是三角多項式),再設以它們为列的 m 阶矩陣为 $\Phi^0(t)$,則(57.3)的任意的概周期解,可以表示为

$$\xi=\Phi^0(t)c+\xi^0(t),$$

此处 c 表示 m 維常数向量。在此把 c 看成是 t 的函数,使得 $\Phi^0(t)c+\xi^0(t)$ 满足(57.2)的第一式。再經过簡单地計算就能知道 $c=c(t)$ 若满足

$$\frac{dc}{dt}=\mu(\Phi^0(t))^{-1}K(t,\ \Phi^0(t)c+\xi^0(t),\ \eta,\ \mu)$$

就可以了。上式与(57.2)的第二式的右端以 $\Phi^0(t)c+\xi^0(t)$ 代 ξ 所得到的式子可以写成

$$\left.\begin{aligned}\frac{dc}{dt}&=\mu K^*(t,\ c,\ \eta,\ \mu),\\ \frac{d\eta}{dt}&=B\eta+q(t)+\mu L^*(t,\ c,\ \eta,\ \mu).\end{aligned}\right\}\tag{57.4}$$

$(\Phi^0(t))^{-1}$ 的元素是三角多項式。[因 $\det\Phi^0(t)=(\det\Phi^0(0))e^{(\mathrm{tr}\,A^0)t}$,又由于实矩陣 A^0 的特征值的实部是零,必有 $\mathrm{tr}\,A^0=0$,所以 $\det\Phi^0(t)$ 是常数($\neq0$),而 $\Phi^0(t)$ 的元素是三角多項式,因此

❶ 原书誤为"A^0x"。——譯者注

$(\Phi^0(t))^{-1}$ 的元素是三角多項式。] 所以 K^*, L^* 是与 F 有同样的結构的(§ 51 的 2°, 3°)。

其次,

$$\frac{d\eta}{dt}=B\eta+q(t)$$

的唯一的概周期解 $\eta^0(t)$, 由于 $q(t)$ 是三角多項式, 所以也是三角多項式。

命

$$\left.\begin{aligned}P(c)&\equiv\lim_{t\to\infty}\frac{1}{t}\int_0^t K^*(t,\ c,\ \eta^0(t),\ 0)dt,\\ u(t,\ c)&\equiv\int_0^t K^*(t,\ c,\ \eta^0(t),\ 0)dt-tP(c),\end{aligned}\right\}\tag{57.5}$$

用

$$\left.\begin{aligned}c&=\gamma+\mu u(t,\ \gamma),\\ \eta&=\eta^0+\mu\zeta,\end{aligned}\right\}\tag{57.6}$$

作从 c, η 到 γ, ζ 的变换, 由(57.4)就得到关于 γ, ζ 的方程

$$\begin{aligned}\left(E_m+\mu\frac{\partial u}{\partial\gamma}\right)\frac{d\gamma}{dt}=&\ \mu P(\gamma)+\mu(P(\gamma+\mu u)-P(\gamma)\\ &+K^*(t,\ c,\ \eta^0(t)+\mu\zeta,\ \mu)-K^*(t,\ c,\ \eta^0(t),\ 0)),\\ \frac{d\zeta}{dt}=&\ B\zeta+L^*(t,\ \gamma,\ \eta^0(t),\ 0)\\ &+(L^*(t,\ \gamma+\mu u,\ \eta^0(t)+\mu\zeta,\ \mu)-L^*(t,\ \gamma,\ \eta^0(t),0)).\end{aligned}$$

对于充分小的 μ, 由于

$$\left(E_m+\mu\frac{\partial u}{\partial\gamma}\right)^{-1}=E_m+\sum_{n=1}^{\infty}\left(-\mu\frac{\partial u}{\partial\gamma}\right)^n\ ❶,$$

前面的方程可写成

$$\left.\begin{aligned}\frac{d\gamma}{dt}&=\mu P(\gamma)+\mu^2Q(t,\ \gamma,\ \zeta,\ \mu),\\ \frac{d\zeta}{dt}&=B\zeta+Z^0(t,\ \gamma)+\mu Z(t,\ \gamma,\ \zeta,\ \mu).\end{aligned}\right\}\tag{57.7}$$

---

❶ 原书在等式右端括号內漏一"−"号。——譯者注

此处 $Z^0(t, \gamma)$ 是 t 的三角多项式，而且它的系数是 γ 的多项式。Q 及 Z 具有与开头的 F 相同的結构(§51 的 2°, 3°)。

这里的(57.7)就是(55.17)的形式，所以我們应用 §56 的論述可知，当

$$P(\gamma^0)=0 \text{ 而且 } \frac{\partial P}{\partial c}(\gamma^0) \text{ 不具有实部为零的特征值} \quad (57.8)$$

时，(57.7) 对于充分小的 μ，具有概周期解 $\gamma(t, \mu)$，$\zeta(t, \mu)$，且它們分別满足 $\gamma(t, 0)=\gamma^0$，$\zeta(t, 0)=\zeta^0(t)$ ❶。此处 $\zeta^0(t)$ 是

$$\frac{d\zeta}{dt}=B\zeta+Z^0(t, \gamma^0)$$

的唯一的概周期解。

从而对于使(57.8)成立的 γ^0，

$$x=V\begin{pmatrix}\Phi^0\gamma^0+\xi^0\\ \eta^0\end{pmatrix}$$

是(51.1)的近似概周期解。

更設

$$\frac{d\eta}{dt}=B\eta+q(t)+\mu L^*(t, \gamma^0, \eta^0(t), 0)$$

的概周期解(因为 B 的特征值的实部不是零，所以这样的解是唯一存在的)为 $\eta^*(t)$，則

$$x=V\begin{pmatrix}\Phi^0(\gamma^0+\mu u(t, \gamma^0))+\xi^0\\ \eta^*\end{pmatrix}$$

就是近似程度更高的近似概周期解。容易知道，它満足一个与原方程(51.1)有 μ^2 程度之差的方程。

§58 稳定性

我們来考虑以定理 6 保証其存在的概周期解的稳定性方面的問題。在一开始先討論下一輔助定理。

---

❶ 原书等式左端括号中 0 誤为 μ。——譯者注

輔助定理　假設 n 阶矩陣 P 的特征值的实部都是負的，此时存在有唯一的一个滿足

$$(\operatorname{grad} V,\ Px) = -(x,\ x) \tag{58.1}$$

的 x 的二次形式 $V=V(x)$，而且 V 是正值二次形式。

証明　将所求的二次形式写为 $V(x)=(Ax,\ x)$，其中設 A 是 n 阶对称矩陣。于是 $\operatorname{grad} V = 2Ax$❶，而且

$$(Ax,\ Px) = (P'Ax,\ x) = (x,\ APx) = (APx,\ x),$$

所以(58.1)就是 $((P'A+AP)x,\ x) = -(x,\ x)$，也就是它与

$$P'A + AP = -E \quad (E\text{ 是 }n\text{ 阶单位矩陣}) \tag{58.2}$$

等价。

其次，我們要証滿足(58.2)的对称矩陣 A 是唯一存在的，而且是正値定符号的。命

$$Q \equiv (E+P)(E-P)^{-1}. \tag{58.3}$$

[由假定，$(E-P)^{-1}$ 是存在的。]❷ 設 P 的特征值为 λ，則 Q 的特征值是 $(1+\lambda)(1-\lambda)^{-1}$，因为 λ 的实部是負的，所以 Q 的特征值的絕对值都比 1 小❸。

---

❶ 設 n 阶对称矩陣 $A=(a_{ij})\quad(i,\ j=1,\ 2,\ \cdots,\ n)$，則

$$Ax = \begin{pmatrix} \sum_{j=1}^{n} a_{1j}x_j \\ \cdots\cdots\cdots \\ \sum_{j=1}^{n} a_{nj}x_j \end{pmatrix},$$

从而数性积

$$(Ax,\ x) = \left(\sum_{j=1}^{n} a_{1j}x_j\right)x_1 + \cdots + \left(\sum_{j=1}^{n} a_{nj}x_j\right)x_n = \sum_{i=1}^{n} a_{ii}x_i^2 + \sum_{i,j=1}^{n} a_{ij}x_ix_j,$$

卽 $\quad V = \sum_{i=1}^{n} a_{ii}x_i^2 + \sum_{i,j=1}^{n} a_{ij}x_ix_j$，于是 $\frac{\partial V}{\partial x_i} = 2a_{ii}x_i + \sum_{j\neq i} a_{ij}x_j$，随之

$$(\operatorname{grad} V)_i = \frac{\partial V}{\partial x_i} = 2a_{ii}x_i + \sum_{j\neq i} a_{ij}x_j = 2\sum_{j=1}^{n} a_{ij}x_j \;[\text{因 } a_{ij}=a_{ji}] = (2Ax)_i.$$——譯者注

❷ $E-P$ 之特征値 $=1-\lambda$，此处 λ 为 P 之特征値，而 $\operatorname{Re}\lambda<0$，故 $E-P$ 之特征値 $\neq 0$，从而可知 $\det(E-P)\neq 0$。——譯者注

❸ 因 $\left|\frac{1+\lambda}{1-\lambda}\right|^2 = \frac{1+\lambda}{1-\lambda}\cdot\left(\overline{\frac{1+\lambda}{1-\lambda}}\right) = \frac{1+\lambda}{1-\lambda}\cdot\frac{1+\bar{\lambda}}{1-\bar{\lambda}} = \frac{1+2\operatorname{Re}\lambda+|\lambda|^2}{1-2\operatorname{Re}\lambda+|\lambda|^2}<1$。——譯者注

由(58.3)，$P=(Q-E)(E+Q)^{-1}$．把它代入(58.2)幷經过簡单的計算就得到

$$2A=2Q'AQ+(E+Q')(E+Q) \text{❶}. \qquad (58.4)$$

命 $C=(E+Q')(E+Q)$，幷以 Q' 左乘上式而以 Q 右乘上式就得到 $2Q'AQ=2Q'^2AQ^2+Q'(E+Q')(E+Q)Q$．將这一方法反复作下去❷就得到

$$2A=2Q'^mAQ^m+C+Q'CQ+\cdots+Q'^{m-1}CQ^{m-1}.$$

由于当 $m\to\infty$ 时，Q^m 向着零矩陣收斂，故可以写出如下的結果：

$$2A=C+Q'CQ+Q'^2CQ^2+\cdots+Q'^mCQ^m+\cdots. \qquad (58.5)$$

以上是在(58.2)成立的假定下导出(58.5)的。反之，当 Q 的特征值的絕对值都比1小时，(58.5)的右端就是收斂的，用它定义的 A，左乘以 Q'，右乘以 Q 之后，就可知是滿足(58.4)的，于是应用(58.3)經过簡单的計算就可以証明 A 滿足(58.2)❸。因为(58.5)的右端的各項是正値定符号的，所以 A 是正値定符号的❹。 証毕

---

❶ 应注意 $(B')^{-1}=(B^{-1})'$.——譯者注

❷ 令 $C=(E+Q')(E+Q)$，于是(58.4)成为

$$2A=2Q'AQ+C, \qquad (1)$$

以 Q'，Q 分别左乘，右乘(1)，而得

$$2Q'AQ=2Q'^2AQ^2+Q'CQ, \qquad (2)$$

將(2)代入(1)得

$$2A=2Q'^2AQ^2+C+Q'CQ. \qquad (3)$$

再以 Q'^2，Q^2 分別左乘，右乘(1)，得

$$2Q'^2AQ^2=2Q'^3AQ^3+Q'^2CQ^2, \qquad (4)$$

將(4)代入(3)中得

$$2A=2Q'^3AQ^3+C+Q'CQ+Q'^2CQ^2.$$

下类推。——譯者注

❸ 更注意 A 对称。因 C 对称 $[C'=(E+Q)'(E+Q')'=(E+Q')(E+Q)=C]$；$Q'CQ$ 对称 $[(Q'CQ)'=Q'C'Q=Q'CQ]$；…从而可知 A 对称。——譯者注

❹ 因 $\det C=\det(E+Q')\det(E+Q)=(\det(E+Q))^2$；

又因 $Q'CQ=Q'(E+Q')(E+Q)Q=((E+Q)Q)'((E+Q)Q)$，

故 $\det Q'CQ=(\det(E+Q)Q)^2$；….——譯者注

注意 1) 当 $\det P=0$ 即 P 以零为特征值时，不存在满足(58.1)的二次形式。

[設对应于零的特征向量为 x_0: $Px_0=0$, $x_0\neq 0$. 如有满足(58.2)的 A，則 $P'Ax_0=-x_0$. 如果作出它与 x_0 的内积，就得到

$$-(x_0, x_0)=(P'Ax_0, x_0)=(Ax_0, Px_0)=0,$$

这与 $x_0\neq 0$ 矛盾。]

2) 当 P 的特征值之中有的值的实部为正値时，若有满足(58.1)的 V 存在，則 V 不是正値形式。

[設实部为正値的特征值为 $\alpha+\beta\sqrt{-1}(\alpha>0)$，如果設对应于它的特征向量为 $y_0+z_0\sqrt{-1}$，則

$$Py_0=\alpha y_0-\beta z_0, \quad Pz_0=\beta y_0+\alpha z_0.$$

作出由(58.2)所得到的 $P'Ay_0+A(\alpha y_0-\beta z_0)=-y_0$ 与 y_0 的内积，$P'Az_0+A(\beta y_0+\alpha z_0)=-z_0$ 与 z_0 的内积；并作这两个内积之和，于是有

$$\alpha((Ay_0, y_0)+(Az_0, z_0))=-(1/2)[(y_0, y_0)+(z_0, z_0)]❶,$$

所以 A 不是正値定符号的。]

定理 7 設定理 6 列举的假定是成立的。并設 §55 的 m 阶矩陣 C 及 B 的 $n-m$ 阶矩陣的特征値的实部都是負的。此时定理 6 所証明了其存在的概周期解是漸近稳定的。

証明 設(55.19)的概周期解为 $\bar{y}(t)$, $\bar{z}(t)$，并命

---

❶ 因 $(-y_0, y_0)=(P'Ay_0+A(\alpha y_0-\beta z_0), y_0)=(P'Ay_0, y_0)+(A(\alpha y_0-\beta z_0), y_0)$
$=(P'Ay_0, y_0)+\alpha(Ay_0, y_0)-\beta(Az_0, y_0)=(Ay_0, Py_0)+\alpha(Ay_0, y_0)-\beta(Az_0, y_0)$,

而 $$(-y_0, y_0)=-(y_0, y_0)=(2Ay_0, Py_0)=2(Ay_0, Py_0),$$

故 $$(-y_0, y_0)-\frac{1}{2}(-y_0, y_0)=\alpha(Ay_0, y_0)-\beta(Az_0, y_0),$$

即 $$\alpha(Ay_0, y_0)-\beta(Az_0, y_0)=-\frac{1}{2}(y_0, y_0). \tag{1}$$

同样有

$$\alpha(Az_0, z_0)+\beta(Ay_0, z_0)=-\frac{1}{2}(z_0, z_0). \tag{2}$$

(1)，(2)相加即得

$\alpha[(Ay_0, y_0)+(Az_0, z_0)]=-\frac{1}{2}[(y_0, y_0)+(z_0, z_0)]$.——本书归謬的結果

原书等式右端誤为"$-\frac{1}{2}(z_0, z_0)$". —— 譯者注

$$\gamma=\bar{\gamma}(t)+\rho(t), \quad z=\bar{z}(t)+r(t),$$

则由(55.19)就得到

$$\left.\begin{aligned}\frac{d\rho}{dt}=\frac{d\gamma}{dt}-\frac{d\bar{\gamma}}{dt}&=\mu C\rho+\mu(\bar{Q}(t,\bar{z}+r)-\bar{Q}(t,\bar{z}))\\&+\mu^2(Q^*(t,\bar{\gamma}+\rho,\bar{z}+r,\mu)-Q^*(t,\bar{\gamma},\bar{z},\mu)),\\\frac{dr}{dt}=Br+\mu(Z^*(t,\bar{\gamma}+\rho,\bar{z}+r,\mu)&-Z^*(t,\bar{\gamma},\bar{z},\mu)).\end{aligned}\right\}\tag{58.6}$$

其次，作出关于ρ的正值定符号的二次形式$V_1(\rho)$与关于r的正值定符号的二次形式$V_2(r)$，使满足(根据輔助定理)

$$\left.\begin{aligned}(\operatorname{grad}V_1(\rho),\ C\rho)=-(\rho,\ \rho),\\(\operatorname{grad}V_2(r),\ Br)=-(r,\ r).\end{aligned}\right\}\tag{58.7}$$

在此設a为正数，并命

$$V=V(\rho,\ r)=\frac{1}{\mu}V_1(\rho)+aV_2(r).$$

此时由(58.6)，(58.7)就得到

$$\begin{aligned}\frac{dV}{dt}&=\frac{1}{\mu}\left(\operatorname{grad}V_1(\rho),\ \frac{d\rho}{dt}\right)+a\left(\operatorname{grad}V_2(r),\ \frac{dr}{dt}\right)\\&=-(\rho,\ \rho)-a(r,\ r)^{❶}+(\operatorname{grad}V_1(\rho),\ \bar{Q}(t,\ \bar{z}+r)-\bar{Q}(t,\ \bar{z})\\&\quad+\mu(Q^*(t,\ \bar{\gamma}+\rho,\ \bar{z}+r,\ \mu)-Q^*(t,\ \bar{\gamma},\ \bar{z},\ \mu)))\\&\quad+\mu a(\operatorname{grad}V_2(r),Z^*(t,\bar{\gamma}+\rho,\bar{z}+r,\ \mu)-Z^*(t,\ \bar{\gamma},\ \bar{z},\ \mu)),\end{aligned}$$

选取适当的正数M_0，M_1，M_2，就可以得到

$$|\bar{Q}_i(t,\ \bar{z}+r)-\bar{Q}_i(t,\ \bar{z})|<M_0\sum_{j=1}^{n-m}|r_j|,$$

$$|Q_i^*(t,\ \bar{\gamma}+\rho,\ \bar{z}+r,\mu)-Q_i^*(t,\bar{\gamma},\bar{z},\mu)|<M_1\left(\sum_{l=1}^{m}|\rho_l|+\sum_{j=1}^{n-m}|r_j|\right),$$

$$|Z_i^*(t,\bar{\gamma}+\rho,\bar{z}+r,\mu)-Z_i^*(t,\ \bar{\gamma},\bar{z},\mu)|<M_2\left(\sum_{l=1}^{m}|\rho_l|+\sum_{j=1}^{n-m}|r_j|\right),$$

所以将μ取得充分小a取得充分大时，$\frac{dV}{dt}$关于r，ρ就是負的定符号的。因为V是正的定符号的，所以当$t\to\infty$时$V(r(t),\ \rho(t))$

❶ 原书在“$(r,\ r)$”前漏因子“a”。——譯者注

$\to 0$. 这就是說 $r(t)\to 0$, $\rho(t)\to 0$. 返回到原来的方程之后，我們就得到所要的結果了。 証毕

§59 例

$$1° \quad \frac{d^2x}{dt^2}+k^2x=f(t)+\mu F\left(x, \frac{dx}{dt}, \sin\omega t\right), \quad k>0. \qquad (59.1)$$

此处假設 $F(x, y, z)$ 是 x, y, z 的多項式，$f(t)$ 是三角多項式

$$a_0+\sum_{r=1}^{p}(a_r\cos\nu_r t+b_r\sin\nu_r t), \quad \nu_r\neq k \quad (r=1, \cdots, p).$$

試求这一方程的概周期解。

設 $\frac{dx}{dt}=y$, 化为方程組形式之后，矩陣 A 的特征值是 $\pm k\sqrt{-1}$. 这是 $m=n=2$ 的情况。

設 c_1, c_2 为常数，則由 $\mu=0$ 而得到的綫性方程的通解是

$$\left.\begin{aligned} x&=c_1\cos kt+c_2\sin kt+g(t), \\ y&=-c_1k\sin kt+c_2k\cos kt+g'(t), \end{aligned}\right\} \qquad (59.2)$$

此处 $g'(t)$ 是 $g(t)$ 的导数，而

$$g(t)=\frac{a_0}{k^2}+\sum_{r=1}^{p}\frac{1}{k^2-\nu_r^2}(a_r\cos\nu_r t+b_r\sin\nu_r t).$$

把 c_1, c_2 看作 t 的函数，并在使它們滿足(59.1)的条件下来确定它們(常数变易法)：由

$$\frac{dc_1}{dt}\cos kt+\frac{dc_2}{dt}\sin kt=0,$$

$$k\frac{dc_1}{dt}(-\sin kt)+k\frac{dc_2}{dt}\cos kt=\mu F(x, y, \sin\omega t)\text{ ❶}$$

可以得到

$$\left.\begin{aligned} \frac{dc_1}{dt}&=-\frac{\mu}{k}F(x, y, \sin\omega t)\sin kt, \\ \frac{dc_2}{dt}&=\frac{\mu}{k}F(x, y, \sin\omega t)\cos kt. \end{aligned}\right\} \qquad (59.3)$$

❶原书在此等式左端两項都遺漏因子 k. ——譯者注

此处右端的 x, y 是由(59.2)所給定的 c_1, c_2 的函数。

命

$$\left.\begin{aligned} P_1(c_1, c_2) &= \lim_{t\to\infty} \frac{1}{t}\int_0^t \left(-\frac{1}{k}\right) F(x(s), y(s), \sin \omega s) \\ &\qquad \cdot \sin ks\, ds, \\ P_2(c_1, c_2) &= \lim_{t\to\infty} \frac{1}{t}\int_0^t \frac{1}{k} F(x(s), y(s), \sin \omega s) \\ &\qquad \cdot \cos ks\, ds, \end{aligned}\right\} \quad (59.4)$$

并設有

$$P_1(c_1^0, c_2^0) = 0, \quad P_2(c_1^0, c_2^0) = 0, \quad (59.5)$$

且关于 λ 的二次方程

$$\begin{vmatrix} \left(\frac{\partial P_1}{\partial c_1}\right) - \lambda & \left(\frac{\partial P_1}{\partial c_2}\right) \\ \left(\frac{\partial P_2}{\partial c_1}\right) & \left(\frac{\partial P_2}{\partial c_2}\right) - \lambda \end{vmatrix} = 0 \quad (左端是行列式) \quad (59.6)$$

$\left(此处\left(\frac{\partial P_i}{\partial c_j}\right) = \frac{\partial P_i}{\partial c_j}(c_1^0, c_2^0)\right)$沒有实部为零的根。

此时方程(59.1)，对于充分小的 μ 具有概周期解

$$x = c_1^0 \cos kt + c_2^0 \sin kt + g(t) + \mu x_1(t, \mu).$$

如果(59.6)的两个根的实部都是負的，这一个解就是漸近稳定的。又(59.5)，(59.6)就是条件(57.8)。

$2°$ $$\frac{d^2x}{dt^2} + k^2 x = b_1 \sin \nu_1 t + b_2 \sin \nu_2 t + \mu\left(c\frac{dx}{dt} + ax^3\right). \quad (59.7)$$

此处設 $k>0, c\neq 0$ 而且 ν_1/ν_2 是无理数。并且对于 $|l| + |l_1| + |l_2| \leqslant 4$ 中的整数 l, l_1, l_2 不等式 $lk + l_1\nu_1 + l_2\nu_2 \neq 0$ 成立。

在这一情况下，前一例中(59.4)的 P_1, P_2 为

$$\left.\begin{aligned} P_1 &= (ck/2)c_1 - (3/8)ac_2((c_1^2 + c_2^2) \\ &\qquad + 2(b_1^2(k^2 - \nu_1^2)^{-2} + b_2^2(k^2 - \nu_2^2)^{-2}), \\ P_2 &= (ck/2)c_2 + (3/8)ac_1((c_1^2 + c_2^2) \\ &\qquad + 2(b_1^2(k^2 - \nu_1^2)^{-2} + b_2^2(k^2 - \nu_2^2)^{-2}). \end{aligned}\right\} \quad (59.8)$$

由 $P_1=P_2=0$ 可得 $c_1=c_2=0$。

(59.6)就是$(\lambda-(ck/2))^2+(9/16)a^2(b_1^2(k^2-\nu_1^2)^{-2}+b_2^2(k^2-\nu_2^2)^{-2})=0$。所以它的根的实部 $\neq 0$。从而方程(59.7)就具有形如

$$\frac{b_1}{k^2-\nu_1^2}\sin\nu_1 t+\frac{b_2}{k^2-\nu_2^2}\sin\nu_2 t+\mu x_1(t,\ \mu)$$

的概周期解。当 $c<0$ 时这一解是渐近稳定的。

如果没有上述条件 $lk+l_1\nu_1+l_2\nu_2\neq 0$ 时，(59.8)的 P_1，P_2 的形式就更要复杂。

$$3^\circ\quad \frac{d^2x}{dt^2}+k^2x=b_1\sin\nu_1 t+b_2\sin\nu_2 t+\mu(1-x^2)\frac{dx}{dt}\qquad(59.9)$$

对于 k，ν_1，ν_2 设与例 2° 相同的假定。

在这一情况下，(59.4)的 P_1，P_2 为

$$P_1=(k/8)c_1(4-c_1^2-c_2^2-2(b_1^2(k^2-\nu_1^2)^{-2}+b_2^2(k^2-\nu_2^2)^{-2})),$$

$$P_2=(k/8)c_2(4-c_1^2-c_2^2-2(b_1^2(k^2-\nu_1^2)^{-2}+b_2^2(k^2-\nu_2^2)^{-2})).$$

所以由 $P_1=P_2=0$ 可以得到

$$c_1=c_2=0\qquad(59.10)$$

或

$$c_1^2+c_2^2+2(b_1^2(k^2-\nu_1^2)^{-2}+b_2^2(k^2-\nu_2^2)^{-2})=4.\qquad(59.11)$$

对于满足(59.10)的 c_1，c_2，(59.6)具有两重根

$$\lambda=(k/4)(2-b_1^2(k^2-\nu_1^2)^{-2}-b_2^2(k^2-\nu_2^2)^{-2}).$$

所以在这一式的右端不是零的条件下，(59.9)对于充分小的 μ 具有形如

$$\frac{b_1}{k^2-\nu_1^2}\sin\nu_1 t+\frac{b_2}{k^2-\nu_2^2}\sin\nu_2 t+\mu x_1(t,\ \mu)$$

的概周期解。这一解当

$$2<\frac{b_1^2}{(k^2-\nu_1^2)^2}+\frac{b_2^2}{(k^2-\nu_2^2)^2}$$

时是渐近稳定的。并且对于满足(59.11)的 c_1，c_2，(59.6)以零为其根。从而在这一情况下定理 6 是不得应用的。